

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Propriétés dynamiques de modèles de réacteurs tubulaires à paramètres répartis

Sonveaux, Candy

Award date:
2018

Awarding institution:
Université de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

**PROPRIETES DYNAMIQUES DE MODELES DE REACTEURS TUBULAIRES A
PARAMETRES REPARTIS**

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en « Sciences Mathématiques à finalité Didactique »**

Candy SONVEAUX

Juin 2018



UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

**PROPRIETES DYNAMIQUES DE MODELES DE REACTEURS TUBULAIRES A
PARAMETRES REPARTIS**

Promoteur : WINKIN J.

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en « Sciences Mathématiques à finalité Didactique »**

Candy SONVEAUX

Juin 2018

Remerciements

J'aimerais exprimer toute ma reconnaissance aux personnes qui m'ont aidée et soutenue lors de la réalisation de ce travail de fin d'études.

Je tiens à remercier plus particulièrement :

- Monsieur Joseph Winkin, mon promoteur, pour son aide, sa disponibilité et ses conseils judicieux.
- Messieurs Jonathan et Jérémy Dehayé, pour leurs remarques pertinentes et le temps qu'ils m'ont consacré.
- Mademoiselle Virginie Debauche, pour ses encouragements, ses réflexions et commentaires éclairés qui m'ont été d'une grande utilité.
- Madame Maggy Gauthier et Monsieur Michel Mauroy qui ont eu la gentillesse de relire ce travail et d'y apporter les corrections nécessaires.
- Mes amis, pour les bons moments passés et les pauses études plus que nécessaires.
- Ma famille, pour son encadrement et son soutien constant et efficace.

Un tout grand merci à toutes et à tous.

Résumé

Nous présentons l'analyse dynamique de deux modèles de réacteurs chimiques tubulaires. La première analyse concerne les réacteurs à effet piston alors que la seconde a pour sujet les réacteurs à dispersion axiale. Dans le cas des réacteurs à effet piston, nous utilisons une version adaptée d'un théorème de génération de semi-groupes positifs afin d'établir la positivité du semi-groupe généré par l'opérateur de ce modèle. Concernant les réacteurs à dispersion axiale, nous nous sommes appuyés sur les propriétés des opérateurs de Riesz et de Sturm-Liouville afin d'établir la génération de semi-groupe et la positivité du système. L'analyse est alors complétée par une démonstration inédite et détaillée de la structure de Riesz de l'opérateur du modèle. Des résultats sur l'observabilité et la stabilité du système ont également été brièvement développés dans les deux cas.

Mots-clés : EDP - réacteurs tubulaires - effet piston - dispersion axiale - génération de semi-groupes - analyse dynamique - positivité - observabilité - stabilité - opérateurs de Sturm-Liouville - opérateurs de Riesz

Abstract

The dynamical analysis of two models of tubular reactors is performed. The first analysis concerns plug-flow reactors and the second one is about reactors with axial dispersion. In the case of plug-flow reactors, we use an adapted version of a theorem concerning the generation of positive semigroups theorem in order to establish the positivity of the semigroup generated by the operator of this model. Regarding the axial dispersion reactor, we use properties of Riesz-spectral and Sturm-Liouville operators in order to show the generation of semigroup and the positivity of the system. The analysis is complemented with an original and detailed proof of the Riesz structure of the system operator. Results about observability and stability of the system are also briefly developed in both cases.

Keywords : PDE - tubular reactors - plug-flow - axial dispersion - semigroups generation - dynamical analysis - positivity - observability - stability - Sturm-Liouville operators - Riesz operators

Table des matières

Introduction	2
1 Description du modèle	3
1.1 Réacteur tubulaire	3
1.2 Modèle dynamique	4
1.3 Réécriture du modèle	7
1.3.1 Description de l'espace de travail	7
1.3.2 Réécriture du modèle en terme d'opérateurs	7
2 Génération de semi-groupes positifs pour le réacteur à effet piston	10
2.1 Adaptation du théorème de génération de semi-groupe positif	12
2.2 Génération de semi-groupes positifs	15
3 Génération de semi-groupes positifs pour le réacteur à dispersion axiale	27
3.1 Génération du semi-groupe	27
3.2 Positivité du semi-groupe	41
4 Stabilité et observabilité des réacteurs tubulaires à effet piston	45
4.1 Etude de la stabilité	46
4.2 Etude de l'observabilité	54
4.2.1 Observabilité avec deux mesures	54
4.2.2 Observabilité avec une mesure	58
5 Stabilité et observabilité des réacteurs tubulaires à dispersion axiale	61
5.1 Stabilité	61
5.2 Observabilité	61
5.2.1 Observabilité avec deux mesures	71
5.2.2 Observabilité avec une mesure	75
Conclusion et perspectives	77
Annexes	82

Introduction

Ce mémoire a pour objectif la réalisation d'une analyse dynamique de modèles de réacteurs tubulaires. Nous allons donc étudier les réacteurs sans et avec dispersion axiale, respectivement nommés réacteurs à effet piston et réacteurs à dispersion axiale. Une première étude de tels réacteurs a déjà été réalisée dans le papier [19]. Néanmoins, nous allons effectuer cette recherche sous un angle différent. En effet, dans ce mémoire, nous allons nous concentrer sur le caractère positif du semi-groupe étudié et baser notre étude sur les propriétés de tels semi-groupes.

Dans un premier temps, nous allons dresser une preuve de la positivité du semi-groupe considéré. Pour ce faire, nous allons utiliser d'une part un théorème détaillé dans l'article [12] afin de proposer une démonstration de génération de semi-groupes positifs dans le cas des réacteurs à effet piston. Cette démonstration est une recherche inédite dans le cas particulier des réacteurs tubulaires. D'autre part, nous utiliserons les propriétés des opérateurs résolvants dans le cas particulier des opérateurs de Sturm-Liouville et des opérateurs de Riesz en ce qui concerne les réacteurs tubulaires avec dispersion axiale. L'étude de la positivité est basée prioritairement sur l'article [11].

Ensuite, nous étudierons les caractéristiques de stabilité et d'observabilité du modèle de réacteur tubulaire sans dispersion axiale en utilisant, lorsque cela sera nécessaire, la propriété de positivité du semi-groupe. Une description des propriétés de stabilité et d'observabilité dans le cas des réacteurs tubulaires à dispersion axiale sera également abordée. Lors de cette partie, nous allons tenter d'apporter une preuve détaillée de la propriété de structure de Riesz de l'opérateur du modèle dans le cas du réacteur à dispersion axiale. Cette propriété est énoncée dans l'article [19] mais sans preuve complète et détaillée. A cet effet, nous développerons les opérateurs de Riesz et démontrerons que certains opérateurs triangulaires dont les entrées diagonales sont des opérateurs de Riesz sont eux-mêmes des opérateurs de Riesz. Nous consoliderons et détaillerons la démonstration établissant la base des vecteurs propres de l'opérateur spectral développée dans le document [19].

L'objectif de ce mémoire est de fournir des outils et propriétés (positivité, stabilité, observabilité) permettant de démontrer plus facilement des résultats utiles dans la société actuelle.

Chapitre 1

Description du modèle

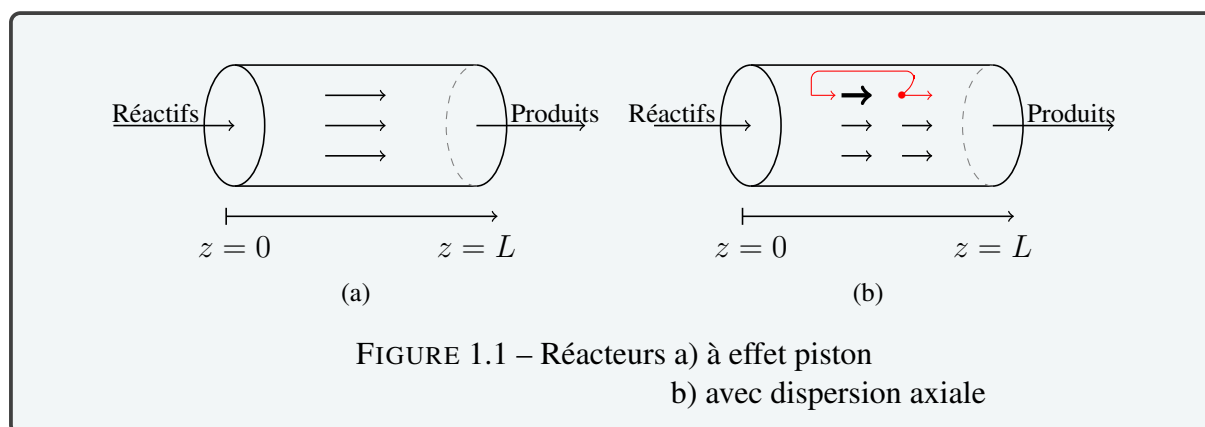
Ce chapitre propose une première approche du thème développé dans ce mémoire, à savoir une introduction aux réacteurs tubulaires. Nous allons mettre en évidence le modèle qui va nous intéresser dans la suite du mémoire ainsi que le cadre général de travail. Une explication des différents réacteurs tubulaires est également proposée afin que le lecteur comprenne au mieux le problème considéré.

1.1 Réacteur tubulaire

Afin de cerner le sujet qui nous intéresse dans ce travail, définissons le concept de réacteur et plus spécifiquement de réacteur tubulaire. Pour ce faire, nous allons nous inspirer des définitions et explications développées dans [14] et [18].

Les réacteurs chimiques occupent une place importante dans les entreprises du secteur de la chimie. Ceux-ci vont permettre de transformer les matières premières en produits utiles à l'aide de réactifs adaptés. Un réacteur est donc un moyen de propulsion qui va transformer des réactifs en produits. Le fonctionnement de ce type d'appareil nécessite d'importantes consommations énergétiques (réchauffement, refroidissement, électricité). Il est donc primordial de les étudier afin de mieux comprendre leur comportement et leur impact environnemental.

Nous allons nous préoccuper de deux cas particuliers de réacteurs tubulaires. Le premier est le réacteur à effet piston. Dans ce cas, le réacteur est composé d'un tube dans lequel circule

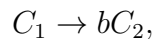


le milieu réactionnel. La sortie des produits va s'effectuer en permanence. Le second type de réacteur est le réacteur tubulaire à dispersion axiale. Cette catégorie de réacteur comprend celle des réacteurs tubulaires à effet piston. Toutefois, un phénomène de dispersion dans la direction z est ajouté au modèle. Cela signifie donc que certaines quantités de fluides peuvent revenir en arrière et se mélanger avec les fluides qui se situent plus en avant et qui ont donc subi des transformations moindres. Nous ne considérerons pas le cas où un phénomène de dispersion radiale a lieu. Un schéma de ces deux types de réacteurs est proposé à la figure [1.1](#) afin d'aider à la compréhension.

1.2 Modèle dynamique

Le modèle considéré dans ce mémoire est introduit dans l'article [\[19\]](#). Nous allons le développer dans cette section en nous inspirant de la thèse [\[6\]](#) et expliquer les différents paramètres qui le composent.

Dans le cas des réacteurs tubulaires, nous considérerons dans ce travail la réaction chimique



où C_1 est le réactif considéré, C_2 est le produit de la réaction et $b > 0$ est le coefficient stœchiométrique de la réaction.

Essayons d'établir les équations dynamiques de ce processus dans le cas général du réacteur tubulaire avec dispersion axiale. Le réacteur qui nous intéresse ne vérifie pas nécessairement les conditions d'homogénéité de masse. C'est pourquoi nous étudierons la variation de masse du système sur une petite section dz et non sur le volume total du réacteur comme mis en évidence sur la figure [1.2](#).

Nous allons émettre l'hypothèse que le phénomène de dispersion qui a lieu dans les réacteurs obéit à la loi de Fick. Cette loi décrit la diffusion qui se produit quand les molécules se déplacent vers des régions moins concentrées qu'initialement. La loi de Fick stipule que le taux de diffusion dans une zone de surface A (en m^2) est donné par

$$-D_a A \frac{\partial C}{\partial z},$$

où D_a est appelé le coefficient de dispersion axiale en m^2/s et C est la concentration d'un composant qui intervient dans la réaction en mol/l . Remarquons que dans le problème considéré, nous pouvons décomposer la surface A comme l'union de deux surfaces. La première est celle dans laquelle l'écoulement des réactifs et produits a lieu, A_e . La seconde surface est celle occupée par les catalyseurs c'est-à-dire, les substances permettant d'augmenter la vitesse d'une

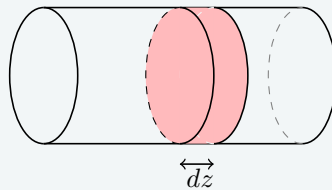


FIGURE 1.2 – Section du réacteur

réaction ou d'enclencher celle-ci sans participer à cette réaction, A_c .

A présent, écrivons l'équation de la variation de masse pour une réaction catalytique qui a lieu à un taux r ($mol/(ls)$). Nous allons débiter en ignorant les coefficients stoechiométriques de la réaction c'est-à-dire, en supposant que b est égal à 1.

Le catalyseur n'intervenant pas dans l'équation, nous avons donc que la variation de la masse d'un composant (réactif ou produit) sur une section dz du système est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [A_e dz C] = & \underbrace{FC}_{\text{flux entrant}} - \underbrace{F \left(C + \frac{\partial C}{\partial z} dz \right)}_{\text{flux sortant}} \\ & \underbrace{-D_a A_e \frac{\partial C}{\partial z}}_{\text{dispersion à la position } z} - \underbrace{\left(-D_a A_e \frac{\partial}{\partial z} \left[C + \frac{\partial C}{\partial z} dz \right] \right)}_{\text{dispersion à la position } z+dz} \pm \underbrace{A_c dz r}_{\text{vitesse de la réaction}}, \quad (1.1) \end{aligned}$$

où F est le taux d'écoulement en m^3/s . Cela représente donc le volume de fluide qui passe sur une surface donnée en une période de temps fixée.

Cette formule nous montre que la variation de la masse d'un composant C au cours du temps sur une surface dz est influencée par plusieurs facteurs. Tout d'abord, elle va augmenter si le flux entrant augmente et diminuer si le flux sortant augmente. Cela justifie le signe positif dans le premier terme de l'équation et négatif dans le second. De plus, dans le second terme, nous regardons l'écoulement à la position $z + dz$. De ce fait, la concentration du composant n'est plus C mais bien C auquel on ajoute une petite modification de concentration, $\frac{\partial C}{\partial z} dz$. Les deux termes qui suivent expriment le phénomène de diffusion axiale. Précédemment, nous avons émis l'hypothèse que la dispersion suivait la loi de Fick. Nous retrouvons donc cette loi pour une concentration C et $C + \frac{\partial C}{\partial z} dz$. Notons également que le phénomène de dispersion ne se produit que pour les composants agissant réellement dans la réaction. Cela signifie qu'il intervient uniquement sur la surface d'écoulement A_e . Finalement, le dernier terme influençant la variation de la masse du composant est la vitesse de la réaction. Le catalyseur agissant sur ce taux, seule la surface occupée par ce dernier sera prise en compte. Remarquons que le signe de ce dernier terme n'est pas fixe. En effet, il sera positif lorsque C représente la concentration d'un produit et négatif pour la concentration d'un réactif. Cela s'explique par le raisonnement suivant, si la vitesse de la réaction augmente, une plus grande quantité de réactifs sera transformée en produits. La concentration en produits augmentera et celle en réactifs diminuera.

Nous allons pouvoir simplifier l'équation (1.1) en divisant chaque côté de l'équation par $A_e dz$, en introduisant la vitesse superficielle du fluide^[1] à l'entrée du tube en m/s , donnée par $v = \frac{F}{A_e}$ et en posant $\epsilon = \frac{A_c}{A}$. Nous obtenons alors l'équation réduite

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -v \frac{\partial C}{\partial z} + D_a \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} r.$$

1. Selon l'article [3], "La vitesse superficielle d'un fluide représente en fait le flux volumique du fluide dans la conduite. Le terme de vitesse superficielle vient de l'homogénéité de la dimension de ces flux à celle d'une vitesse".

En réarrangeant les termes et en supposant que ϵ soit égal à $\frac{1}{2}$, nous obtenons

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - v \frac{\partial C}{\partial z} + r.$$

Il reste à établir les conditions aux bords du modèle. Étant donné qu'il y a une dérivée du second ordre par rapport à z , deux conditions aux bords vont être requises. Dans notre cas, nous allons en prendre une à l'entrée du réacteur c'est-à-dire, en $z = 0$ et une autre à la sortie du réacteur qui correspond à la composante $z = L$. Nous allons utiliser les conditions aux bords de Danckwerts, comme évoqué dans la référence [6]. Cela nous donne

$$\begin{aligned} D_a \frac{\partial C}{\partial z}(z = 0, t) - vC(z = 0, t) &= -vx_{in}(t), \\ D_a \frac{\partial C}{\partial z}(z = L, t) &= 0, \end{aligned}$$

avec $x_{in}(t)$ qui est la concentration du réactif à l'entrée du tube en mol/l .

Finalement, les équations dynamiques de ce processus dans un réacteur tubulaire avec dispersion axiale sont données, en prenant compte du coefficient stœchiométrique b pour tout temps t positif et pour tout $z \in [0, L]$ où L est la longueur du réacteur, par

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} - v \frac{\partial x_1}{\partial z} - r(x_1, x_2), \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 x_2}{\partial z^2} - v \frac{\partial x_2}{\partial z} + br(x_1, x_2) \end{cases}$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} D_a \frac{\partial x_1}{\partial z}(z = 0, t) - vx_1(z = 0, t) = -vx_{in}(t), \\ D_a \frac{\partial x_2}{\partial z}(z = 0, t) - vx_2(z = 0, t) = 0, \\ D_a \frac{\partial x_1}{\partial z}(z = L, t) = 0, \\ D_a \frac{\partial x_2}{\partial z}(z = L, t) = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

où $x_1(z, t)$ et $x_2(z, t)$ sont les concentrations de C_1 et C_2 en mol/l .

Nous supposons par la suite que la vitesse de la réaction dépend uniquement de la concentration en réactifs x_1 . Nous avons donc une réaction chimique de premier ordre. Suite à cette hypothèse et présumant que la vitesse de réaction du modèle est linéaire, nous pouvons noter $r = k_0 x_1$ où k_0 est la constante cinétique positive en s^{-1} . Le modèle dynamique de base pour les réacteurs tubulaires avec dispersion axiale est donc le modèle linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} - v \frac{\partial x_1}{\partial z} - k_0 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 x_2}{\partial z^2} - v \frac{\partial x_2}{\partial z} + b k_0 x_1 \end{cases}$$

avec les conditions aux bords (1.2). Ce modèle est une équation aux dérivées partielles, linéaire, non homogène, d'ordre 2, d'inconnues x_1 et x_2 et à deux variables t et z .

1.3 Réécriture du modèle

Dans cette section, nous réécrivons le modèle afin de le formuler sous la forme d'un système d'espace d'état $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$. Préalablement, nous définirons notre espace de travail afin de clarifier le contexte mathématique dans lequel nous nous trouvons. Cette partie du mémoire est fortement inspirée de l'article [19] et reprend plusieurs résultats développés dans ce papier.

1.3.1 Description de l'espace de travail

Dans le cadre de l'analyse du modèle du réacteur tubulaire, nous nous placerons dans un espace de Hilbert $H = L^2(0, L) \oplus L^2(0, L)$, où $L^2(0, L)$ dénote l'espace des fonctions à valeurs réelles, mesurables, de carré intégrable [2]. De plus, la notation $X \oplus Y$ fait référence au produit cartésien entre deux espaces de Hilbert, X et Y , doté du produit scalaire défini par

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \langle (x_1, y_1)^T, (x_2, y_2)^T \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle x_1, x_2 \rangle_X + \langle y_1, y_2 \rangle_Y,$$

où z_1 et $z_2 \in X \oplus Y$. Nous voyons donc que la définition du produit scalaire entre deux éléments de H se base sur celle du produit scalaire entre deux fonctions de $L^2(0, L)$. Ce produit scalaire sur $L^2(0, L)$ est défini par $\langle f, g \rangle_2 = \int_0^L f(z)g(z)dz$.

La norme sur H repose également sur celle de $L^2(0, L)$. Elle est donnée $\forall x = (x_1, x_2)^T \in H$ par

$$\|x\| = \sqrt{\|x_1\|_2^2 + \|x_2\|_2^2}, \quad \text{où} \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle_2}.$$

1.3.2 Réécriture du modèle en terme d'opérateurs

Jusqu'à présent, nous avons considéré $x(z, t) = (x_1(z, t), x_2(z, t))^T$ de façon temporelle. Dans la suite, nous redéfinirons cet élément x afin de réécrire le modèle sous forme d'équations dans un espace fonctionnel.

Posons

$$\begin{aligned} x(\cdot, t) = x(t) : [0, L] &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto x(z, t) = (x(t))(z), \end{aligned}$$

$$2. \left\{ f \text{ tq } f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tq } \int_0^L |f(z)|^2 dz < \infty \right\}$$

où x est une fonction de z , indépendante de t . Le système peut alors s'écrire

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = D_a \frac{d^2 x_1}{dz^2} - v \frac{dx_1}{dz} - k_0 x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = D_a \frac{d^2 x_2}{dz^2} - v \frac{dx_2}{dz} + b k_0 x_1, \end{cases} \quad (1.3)$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} D_a \frac{dx_1}{dz}(z=0) - v x_1(z=0) = -v x_{in}(t), \\ D_a \frac{dx_2}{dz}(0) - v x_2(0) = 0, \\ D_a \frac{dx_1}{dz}(L) = 0, \\ D_a \frac{dx_2}{dz}(L) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Nous allons effectuer une dernière modification du système afin de pouvoir l'écrire en terme d'opérateurs. Nous allons introduire un delta de Dirac dans l'équation (1.3) afin d'y ajouter le terme $-v x_{in}(t)$, présent uniquement lorsque $z = 0$. Cela va alors permettre de travailler avec un système dont les conditions aux bords sont des équations homogènes. Nous obtenons alors le système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = D_a \frac{d^2 x_1}{dz^2} - v \frac{dx_1}{dz} - k_0 x_1 + v \delta(z) x_{in}(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = D_a \frac{d^2 x_2}{dz^2} - v \frac{dx_2}{dz} + b k_0 x_1, \end{cases} \quad (1.5)$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} D_a \frac{dx_1}{dz}(z=0) - v x_1(z=0) = 0, \\ D_a \frac{dx_2}{dz}(0) - v x_2(0) = 0, \\ D_a \frac{dx_1}{dz}(L) = 0, \\ D_a \frac{dx_2}{dz}(L) = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Ce modèle peut se réécrire sous la forme générale d'un système d'espace d'état à savoir

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0. \quad (1.7)$$

Il suffit de prendre $\dot{x}(t)$ comme la dérivée par rapport au temps de l'état (vu comme fonction de z) $x(t) = x(., t) = (x_1(t), x_2(t))^T = (x_1(., t), x_2(., t))^T$ et le contrôle $u(t) = x_{in}(t)$. L'opérateur de contrôle B est un opérateur linéaire borné de \mathbb{R}^2 dans H , défini par

$$B = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_w(.), \quad (1.8)$$

où $\Delta_w(\cdot)$ représente une impulsion unitaire finie de largeur w , définie par $\Delta_w(z) = 1/w$ pour $z \in [0, w[$ et est nulle partout ailleurs. Cette impulsion est donc une approximation de la distribution du delta de Dirac en $z = 0$ et est utilisée afin de rendre l'opérateur B borné. L'opérateur linéaire A est quant à lui équivalent à

$$A = A_2 + A_1 + A_0, \text{ avec}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} D_a & 0 \\ 0 & D_a \end{pmatrix} \frac{d^2}{dz^2}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} \frac{d}{dz}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} -k_0 & 0 \\ bk_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

En remplaçant ces deux opérateurs dans l'équation (1.7), nous retrouvons le système (1.5) muni des conditions aux bords (1.6). Finalement, comme énoncé dans le papier [19], le domaine de l'opérateur A est celui de $A_2 + A_1$ car l'opérateur A_0 est un opérateur borné. Le domaine de l'opérateur A est alors donné par

$$\begin{aligned} D(A) &= D(A_2 + A_1) \\ &= \left\{ x = (x_1, x_2)^T \in H : x, \frac{dx}{dz} \in H \text{ et sont absolument continus,} \right. \\ &\quad \left. \frac{d^2x}{dz^2} \in H, D_a \frac{dx_i}{dz}(0) - vx_i(0) = 0, D_a \frac{dx_i}{dz}(L) = 0, \text{ pour } i = 1, 2 \right\}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Cette définition, énoncée de la sorte, est valable à la fois pour les réacteurs tubulaires à effet piston et les réacteurs à dispersion axiale.

Chapitre 2

Génération de semi-groupes positifs pour le réacteur à effet piston

Dans ce mémoire, nous débuterons la recherche concernant l'analyse dynamique des réacteurs tubulaires en nous intéressant au caractère positif du semi-groupe. Dans un premier temps, nous considérerons les réacteurs chimiques tubulaires à effet piston. Nous montrerons dans ce chapitre que nous sommes en présence d'opérateurs positifs. La positivité signifiera que pour toute condition initiale positive et toute entrée positive, la trajectoire d'état et la sortie correspondantes sont positives. Ainsi, cela assure que le modèle a une interprétation physique cohérente car nous travaillons avec des concentrations qui sont toujours positives. Explicitons d'abord quelques concepts qui permettront une meilleure compréhension par la suite.

En nous référant à [20], nous pouvons énoncer une définition de semi-groupe fortement continu.

Définition 2.1. Semi-groupe

Soit Z un espace de Hilbert. Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur Z est une famille $(S(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(Z)$ telle que

1. Condition initiale : $S(0) = I$.
2. Propriété de semi-groupe : $\forall t, s \geq 0, S(t+s) = S(t)S(s)$.
3. Propriété de continuité forte : $\forall x_0 \in Z, \|S(t)x_0 - x_0\| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$.

La définition de positivité d'un semi-groupe requiert la notion de relation d'ordre et se définit sur un treillis de Banach.

Définition 2.2. Relation d'ordre

Soit Z un ensemble. Une relation binaire R sur Z est une relation d'ordre si elle est

1. réflexive c'est-à-dire, $\forall x \in Z, x R x$,
2. antisymétrique c'est-à-dire, $\forall x, y \in Z, x R y$ et $y R x$ impliquent $x = y$,
3. transitive c'est-à-dire, $\forall x, y, z \in Z, x R y$ et $y R z$ impliquent $x R z$.

1. Le terme relation binaire R sur un ensemble Z désigne un sous-ensemble de $Z \times Z$.

A présent, développons la notion de treillis de Banach en introduisant deux concepts préalables, celui de treillis vectoriel et de norme de treillis. Ces définitions s'inspirent du document [17].

Définition 2.3. Treillis vectoriel

Un espace vectoriel réel Z ordonné par une relation d'ordre R est dit treillis vectoriel si chaque paire d'éléments x et $y \in Z$ admet une borne supérieure dénotée par $x \vee y = \sup(x, y)$ et une borne inférieure dénotée par $x \wedge y = \inf(x, y)$. Il faut également que les propriétés suivantes soient satisfaites,

1. $x R y$ implique $x + z R y + z \forall x, y, z \in Z$,
2. $0 R x$ implique $0 R \lambda x \forall x \in Z$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Dans ce cas, $Z_+ := \{x \in Z : 0 R x\}$ est appelé cône positif de Z . De plus, notons la valeur absolue de x , $|x| := x \vee (-x)$. Nous définissons la norme de treillis comme suit,

Définition 2.4. Norme de treillis

La norme sur un treillis vectoriel Z est appelée norme de treillis si,

$$|x| R |y| \text{ implique } \|x\| R \|y\|, \text{ pour } x, y \in Z.$$

Nous en déduisons alors la définition de treillis de Banach,

Définition 2.5. Treillis de Banach

Un treillis de Banach est un espace de Banach réel Z doté de la relation d'ordre R tel que (Z, R) est un treillis vectoriel et que la norme sur Z est une norme de treillis.

Finalement, dans le livre [10, Chapitre 7], la notion de positivité est définie pour les espaces de Banach du type $L^p(\Omega)$ ou $C_0(\Omega)$, comme suit

Définition 2.6. Semi-groupe positif

Un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach Z est dit positif si chaque opérateur $S(t)$ est positif c'est-à-dire, si

$$\forall f \in Z, \quad f R 0 \quad \text{implique que} \quad S(t)f R 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

où R représente la relation d'ordre sur Z donnée par $f R 0$, si et seulement si, $f(x) \geq 0$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Dans cette section, nous nous intéresserons au modèle dynamique dérivé de l'équation (1.5), en l'absence de dispersion. Le coefficient de dispersion D_a est donc mis à zéro dans ce cas particulier. Les équations deviennent alors

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -v \frac{dx_1}{dz} - k_0 x_1 + v \Delta_w x_{in}(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = -v \frac{dx_2}{dz} + b k_0 x_1, \end{cases}$$

avec les conditions aux bords $x_1(z=0, t) = 0, x_2(z=0, t) = 0$.

En effectuant un raisonnement analogue au précédent, nous pouvons écrire ce système en terme d'opérateurs.

Nous obtenons alors $\dot{x} = \bar{A}x(t) + Bu(t)$, avec B défini par (1.8) et

$$\begin{aligned}\bar{A} &= A_1 + A_0, & (\text{où } A_1 \text{ et } A_0 \text{ sont définis par (1.9)}) \\ &= \begin{pmatrix} -v \frac{d}{dz} - k_0 & 0 \\ bk_0 & -v \frac{d}{dz} \end{pmatrix}, \\ &:= \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Le domaine de l'opérateur \bar{A} est donné par

$$D(\bar{A}) = D(\bar{A}_{11}) \oplus D(\bar{A}_{22}) = \left\{ x = (x_1, x_2)^T \in H : x \text{ est absolument continu, } \frac{dx}{dz} \in H \text{ et } x_1(0) = 0 = x_2(0) \right\}.$$

2.1 Adaptation du théorème de génération de semi-groupe positif

Dans cette partie, nous développerons un théorème de génération de semi-groupe positif provenant de [12] que nous appliquerons par la suite au modèle du réacteur à effet piston. Quelques corrections ont été apportées à ce théorème afin qu'il soit adapté à l'étude réalisée.

Dans un premier temps, nous introduirons quelques notations et définitions qui seront utiles pour la compréhension du théorème. Pour rappel,

Définition 2.7. Cône

Une partie Z_+ d'un espace de Hilbert Z définie par $Z_+ = \{x \in Z : 0 \leq x\}$ est un cône, si et seulement si, cette partie est stable pour la multiplication par tout réel strictement positif. En d'autres termes, Z_+ est un cône, si et seulement si,

$$\forall x \in Z_+ \text{ et } \forall \lambda > 0, \lambda x \in Z_+.$$

Dans le cas du modèle, la partie H_+ de l'espace de Hilbert H est définie par

$$\{x \in H : x \geq 0 \text{ presque partout}\}.$$

La relation d'ordre est donc déterminée par $x \leq y$ ssi $x - y \in H_+$.

De plus, définissons la demi-norme canonique $N(\cdot)$ sur H par

$$N(x) = \inf \{\|y\| : x \leq y\} \text{ pour tout } x \in H,$$

et la norme ordonnée $\|\cdot\|_N$ par

$$\|x\|_N = N(x) \vee N(-x) = \inf \{\lambda \geq 0 : -\lambda u \leq x \leq \lambda v \text{ pour certains } u, v \in H_1\},$$

où H_1 fait référence à la boule unité fermée de H c'est-à-dire, $H_1 = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ et le symbole \vee désigne le supremum. En outre, une partie H_+ est dite $(\alpha-)$ normale s'il existe

un réel $\alpha \geq 1$ tel que pour toutes fonctions $f, g, h \in H$, avec $f \leq g \leq h$, nous avons que $\|g\| \leq \alpha(\|f\| \vee \|h\|)$. Finalement, la notation $\mathcal{L}(H)_+$ réfère au cône positif des opérateurs linéaires bornés sur $(H, \|\cdot\|)$.

A présent, nous allons expliciter quelques théorèmes et résultats admis qui serviront de support pour la démonstration de la positivité. La première propriété démontrée dans le livre [16, Chapitre 2, Section 1] permettra de prouver la normalité d'un cône sans passer par la définition. Le premier théorème explicité dans ce qui suit provient de la référence [12] et permet de mettre en évidence la positivité du semi-groupe $\bar{T}(t)$. Le second sera utile pour montrer la fermeture d'un opérateur et est tiré du livre [4].

Propriété 2.1. Caractérisation d'un cône normal

Si un espace vectoriel ordonné Z est muni d'une norme $\|\cdot\|$ et si Z_+ est le cône positif de Z , alors Z_+ est normal pour la topologie engendrée par la norme $\|\cdot\|$, si et seulement si, il existe une constante strictement positive α telle que $\|x + y\| \geq \alpha \max\{\|x\|, \|y\|\}$, $\forall x, y \in Z_+$.

Théorème 2.1. Théorème de génération de semi-groupes positifs

Soit $(Z, Z_+, \|\cdot\|)$ un espace de Banach ordonné par le cône convexe propre fermé Z_+ , avec un espace dual ordonné $(Z^*, Z_+^*, \|\cdot\|)$.

Si Z_+ est normal, alors pour $\gamma \geq 0$ et $M \geq 1$, les énoncés suivants sont équivalents.

a) L'opérateur A génère un semi-groupe fortement continu positif d'opérateurs $(S(t))_{t \geq 0}$.

De plus, $\|S(t)\|_N \leq Me^{\gamma t}$ pour tout $t \geq 0$.

b) L'opérateur A est un opérateur linéaire, fermé et de domaine dense sur Z tel que le rang de l'opérateur $I - \alpha A$ est égal à l'espace Z tout entier.

De plus, $N((I - \alpha A)^n a) \geq ((1 - \alpha\gamma)^n / M) N(a)$ pour tout $\alpha > 0$ tel que $\alpha\gamma < 1$ et où $a \in D(A^n)$ pour $n \geq 1$.

c) L'opérateur A est un opérateur linéaire, fermé et de domaine dense sur Z tel que l'opérateur $(I - \alpha A)^{-1} \in \mathcal{L}(Z)_+$.

De plus, $\|(I - \alpha A)^{-n}\|_N \leq M / (1 - \alpha\gamma)^n$ pour tout $\alpha > 0$ tel que $\alpha\gamma < 1$ et pour tout $n > 1$.

Ce théorème est une correction du théorème disponible dans l'article [12] où nous n'utilisons pas l'opérateur $I + \alpha A$ mais plutôt l'opérateur $I - \alpha A$. En effet, il semble qu'une erreur se soit glissée dans cette référence. Voici les grandes lignes de la correction qui concerne l'équivalence entre les points a) et c) sur lesquels nous baserons notre raisonnement dans la suite.

La première partie de la preuve de ce théorème consiste à utiliser le théorème de Feller-Miyadera-Philips sur l'opérateur $(I + \alpha A)^{-n}$ afin de montrer la propriété de génération de semi-groupes. Néanmoins, l'inégalité évoquée est valable pour l'opérateur $(I - \alpha A)^{-n}$. Le théorème de Feller-Miyadera-Philips démontre, comme détaillé dans la thèse [7, Chapitre 2, Section 2], qu'un opérateur A génère un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ qui satisfait $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$, si et seulement si, l'opérateur A est un opérateur fermé et dense tel que

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, où $Re(\lambda) > \omega$, nous avons

$$\lambda \in \rho(A) \text{ et } \|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

En prenant un cas particulier où $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = 1/\lambda$ et $\omega = \gamma$, nous obtenons alors qu'il y a génération de semi-groupes, si et seulement si, $1/\alpha > \gamma$, c'est-à-dire, $\alpha\gamma < 1$ et

$$\|(I - \alpha A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\frac{1}{\alpha} - \gamma)^n}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ ou encore, } \|(I - \alpha A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(1 - \alpha\gamma)^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

La seconde partie de la démonstration du Théorème 2.1 consiste à montrer la positivité du semi-groupe. Pour ce faire, le papier [12] utilise dans son raisonnement deux résultats intermédiaires à savoir que

$$S(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} x,$$

$$\text{et que } (I + \alpha A)^{-n} x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} S_{\alpha t} x \, dt.$$

Cependant, le premier résultat est incorrect. Il nécessite un signe négatif dans la parenthèse. Nous pouvons le montrer en utilisant le développement en limite de l'exponentielle. La relation correcte est donnée par $S(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} x$. La seconde assertion est également erronée. Nous allons montrer qu'elle est valable pour l'opérateur $(I - \alpha A)^{-n}$ et non $(I + \alpha A)^{-n}$ ainsi qu'il est indiqué dans la référence [12]. Comme expliqué dans la thèse [7], $R(\lambda, A)^n = (\lambda I - A)^{-n}$ peut être écrit à l'aide d'une formulation intégrale par

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} S_t x \, dt.$$

A présent, appliquons ce développement à l'opérateur $(I - \alpha A)^{-n}$. Nous avons les égalités suivantes,

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)^{-n} &= \left(\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right) \right)^{-n}, \\ &= \frac{1}{\lambda^n} \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right)^{-n}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors déduire que

$$\left(I - \frac{1}{\lambda} A \right)^{-n} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} S_t x \, dt.$$

En posant $\frac{1}{\lambda} = \alpha$, cela devient

$$(I - \alpha A)^{-n} = \frac{1}{\alpha^n (n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\frac{t}{\alpha}} S_t x \, dt.$$

Finalement, en effectuant le changement de variables $\frac{t}{\alpha} = \tau$, nous avons

$$\begin{aligned} (I - \alpha A)^{-n} &= \frac{1}{\alpha^n (n-1)!} \int_0^\infty (\alpha\tau)^{n-1} e^{-\tau} S_{\alpha\tau} x \, d\tau, \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty (\tau)^{n-1} e^{-\tau} S_{\alpha\tau} x \, d\tau. \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc l'argument utilisé dans la démonstration du Théorème 2.1 pour l'opérateur $(I - \alpha A)^{-n}$.

Nous déduisons alors des développements précédents que le Théorème 2.1 est valable pour l'opérateur $(I - \alpha A)^{-n}$ et non $(I + \alpha A)^{-n}$.

Théorème 2.2. Fermeture d'un opérateur^a

Supposons que Z_1 et Z_2 soient des espaces de Banach et que S soit un opérateur linéaire surjectif de domaine $D(S) \subset Z_1$. En outre, si S est inversible avec $S^{-1} \in \mathcal{L}(Z_2, Z_1)$, alors l'opérateur S est fermé.

a. Dans la suite de ce mémoire, lorsque nous parlerons de fermeture de l'opérateur, nous référerons au fait que l'opérateur est fermé.

2.2 Génération de semi-groupes positifs

Dans cette partie, nous démontrerons que l'opérateur \bar{A} génère un semi-groupe et que celui-ci est positif. Nous disposons de tous les outils nécessaires pour étudier la génération d'un semi-groupe positif par l'opérateur \bar{A} c'est-à-dire, dans le cas des réacteurs tubulaires à effet piston.

Théorème 2.3. *L'opérateur \bar{A} génère un semi-groupe positif fortement continu $\bar{T}(t)$.*

Démonstration. Afin de montrer ce théorème, nous allons utiliser le Théorème 2.1 et plus précisément l'équivalence entre les relations a) et c). Nous allons donc prouver que toutes les hypothèses évoquées dans le Théorème 2.1 sont respectées dans le cas de ce problème.

(i) *Propriété de l'espace de travail H*

Ce théorème est valable si l'espace $(H, H_+, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach ordonné par le cône convexe propre fermé H_+ . Dans un premier temps, nous allons montrer que nous sommes bien dans le cas d'un tel espace.

(a) *Espace de Banach*

Tout d'abord, nous savons que H est un espace de Hilbert, c'est donc bien un espace de Banach.

(b) *Espace ordonné*

De plus, nous pouvons montrer que (H, H_+) est un espace ordonné pour la relation d'ordre déterminée par $x \geq y$ ssi $x - y \in H_+$. Pour ce faire, montrons que les trois axiomes de la relation d'ordre, repris dans la Définition 2.2 sont satisfaits.

Soit $x, y, v \in H$, la propriété de réflexivité est respectée sur H . En effet, la relation $x \leq x$ est bien vérifiée. En outre, nous travaillons dans le cadre d'un espace antisymétrique car $x \leq y$ et $y \leq x$ implique l'égalité entre x et y . Finalement, la relation de transitivité, à savoir $x \leq y$ et $y \leq v$ entraînent que $x \leq v$, est vraie sur l'espace H et pour la relation d'ordre donnée par H_+ . Les détails des calculs sont relativement simples et n'utilisent que la définition de la relation d'ordre. Ils sont donc laissés aux soins du lecteur. Nous pouvons déjà remarquer que l'espace dual H^* est ordonné en s'appuyant sur des raisonnements semblables aux précédents.

(ii) *Propriété du cône H_+* (a) *H_+ est un cône*

Afin de montrer que H_+ forme un cône, nous allons nous baser sur la Définition 2.7. Soit $x \in H_+$ et λ un nombre réel strictement positif, montrons que $\lambda x \in H_+$. Par définition de H_+ , $x \in H_+$ implique que $x \geq 0$ presque partout. Comme $\lambda > 0$, nous avons donc que $\lambda x \geq 0$ presque partout. On en déduit donc que $\lambda x \in H_+$, d'où H_+ est bien un cône.

(b) *Le cône H_+ est convexe*

A présent, montrons que le cône H_+ est un cône convexe. Par la définition, H_+ est un convexe si pour tout $x, y \in H_+$, $x + y \in H_+$. Considérons x et $y \in H_+$ quelconque. Cela signifie donc que $x \geq 0$ presque partout et $y \geq 0$ presque partout. Or, l'addition de deux fonctions positives presque partout donne une fonction positive presque partout. En d'autres termes, nous avons que $x + y \geq 0$ presque partout et donc que $x + y \in H_+$. Le cône H_+ est bien convexe.

(c) *Le cône H_+ est propre*

Prouvons maintenant que le cône H_+ est propre. Dans la littérature, la définition du terme "cône propre" diffère selon les auteurs. Néanmoins, dans le cas présent nous utilisons la terminologie propre pour se référer au caractère pointé du cône, comme expliqué dans la référence [2]. Nous allons donc démontrer que $H_+ \cap -H_+ = 0$. Par définition, $H_+ = \{x : x \geq 0 \text{ presque partout}\}$. L'ensemble $-H_+$ se définit donc comme $\{x : -x \geq 0 \text{ presque partout}\}$, ou encore $\{x : x \leq 0 \text{ presque partout}\}$. D'où $H_+ \cap -H_+ = 0$.

(d) *Le cône H_+ est fermé*

Afin de terminer la preuve de cette première partie, montrons que le cône H_+ est fermé. L'ensemble H_+ est fermé, si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de H_+ qui convergent vers un élément $x \in H$, nous avons $x \in H_+$.

Soit $(x_n)_n = ((x_{1n}, x_{2n})^T)_n \subset H_+$ tq $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} x = (x_1, x_2)^T \in H$. Montrons que $x \in H_+$ c'est-à-dire, prouvons que pour presque tout $z \in [0, L]$, $x(z) \geq 0$. Nous savons que

$$\begin{aligned} x_n &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} x, \\ \Leftrightarrow \|x_n - x\| &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de norme sur H ,

$$\Leftrightarrow \sqrt{\|x_{1n} - x_1\|_2^2 + \|x_{2n} - x_2\|_2^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Finalement, les deux quantités au carré sont positives. Nous obtenons donc

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|x_{1n} - x_1\|_2^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \\ \|x_{2n} - x_2\|_2^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{cases}$$

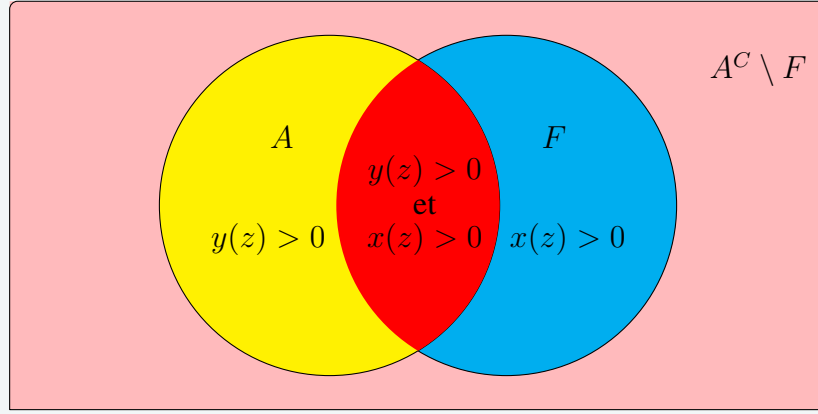
Procédons par l'absurde et supposons que x_1 n'est pas positive presque partout. Cela signifie qu'il existe une partie mesurable $F \subset [0, L]$ telle que la mesure de Lebesgue de cette partie, $\lambda(F)$, est non nulle et pour tous éléments z dans F , $x_1(z)$ est une fonction strictement négative. Nous obtenons, grâce à la définition de la norme sur $L^2(0, L)$, que

$$\begin{aligned} \|x_{1n} - x_1\|_2^2 &= \int_0^L (x_{1n}(z) - x_1(z))^2 dz, \\ &= \underbrace{\int_{F^C} (x_{1n}(z) - x_1(z))^2 dz}_{\geq 0} + \int_F (x_{1n}(z) - x_1(z))^2 dz. \\ &\geq \int_F (x_{1n}(z) - x_1(z))^2 dz. \end{aligned}$$

Les quantités $x_{1n}(z)$ et $-x_1(z)$ étant toutes deux positives sur la partie F , nous avons donc

$$\begin{aligned} &> \int_F (x_1(z))^2 dz, \\ &> 0. \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_F |x_1(z)|_2^2 dz$ est une constante strictement positive. Cela implique alors que $\|x_{1n} - x_1\|_2^2$ ne converge pas vers 0. Cela contredit l'hypothèse selon laquelle x_n converge vers x . Nous pouvons donc conclure que x_1 est positif presque partout. Par un raisonnement analogue, nous pouvons observer que x_2 est également positif presque partout. Nous concluons donc que $x = (x_1, x_2)^T \in H_+$. Le cône H_+ est donc fermé.

FIGURE 2.1 – Décomposition de l'ensemble $[0, L]$ en terme de A et F

(g) *Le cône H_+ est normal*

Maintenant, abordons la deuxième partie de cette preuve. Cette étape consiste à prouver que le cône H_+ est normal. Pour ce faire, utilisons la Propriété 2.1 et montrons que $\forall x, y \in H_+, \exists \alpha > 0$ tel que $\|x + y\| \geq \alpha \max \{\|x\|, \|y\|\}$. Prenons x et $y \in H_+$. Cela signifie que x et y sont positifs λ -presque partout. En d'autres termes, $F^C = \{z \in [0, L] : x(z) < 0\}$ est de mesure nulle et l'ensemble A^C , donné par $A^C = \{z \in [0, L] : y(z) < 0\}$ est également de mesure nulle.

Nous avons

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 &= \int_0^L (x_1(z) + y_1(z))^2 dz + \int_0^L (x_2(z) + y_2(z))^2 dz, \\
 &= \int_0^L x_1^2(z) dz + 2 \int_0^L x_1(z) y_1(z) dz + \int_0^L y_1^2(z) dz + \int_0^L x_2^2(z) dz \\
 &\quad + 2 \int_0^L x_2(z) y_2(z) dz + \int_0^L y_2^2(z) dz, \\
 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \underbrace{2 \int_0^L x_1(z) y_1(z) dz + 2 \int_0^L x_2(z) y_2(z) dz}_{:= (*)}. \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

A présent, intéressons-nous aux deux derniers termes. Ces termes sont positifs car ce sont les intégrales de produits de fonctions positives presque partout. Essayons de nous convaincre de ce résultat.

Pour ce faire, décomposons l'ensemble $[0, L]$ à l'aide des sous-ensembles A et F . La figure 2.1 permet d'aider à la compréhension de cette décomposition et de la suite de la preuve.

$$\begin{aligned}
 (*) &= 2 \int_{A \cap F} x_1(z) y_1(z) dz + 2 \int_{F \setminus A} x_1(z) y_1(z) dz + 2 \int_{A \setminus F} x_1(z) y_1(z) dz \\
 &\quad + 2 \int_{A^C \setminus F} x_1(z) y_1(z) dz + 2 \int_{A \cap F} x_2(z) y_2(z) dz + 2 \int_{F \setminus A} x_2(z) y_2(z) dz \\
 &\quad + 2 \int_{A \setminus F} x_2(z) y_2(z) dz + 2 \int_{A^C \setminus F} x_2(z) y_2(z) dz.
 \end{aligned}$$

Nous observons que $A^C \setminus F$ est un sous-ensemble de mesure nulle. En outre, les ensembles $F \setminus A$ et $A \setminus F$ sont des sous-ensembles d'ensembles de mesure nulle respectivement A^C et F^C . Ce sont donc des ensembles de mesure nulle. Or, l'intégrale d'une fonction sur un ensemble de mesure nulle est nulle. Nous obtenons donc,

$$(\star) = 2 \int_{A \cap F} x_1(z) y_1(z) dz + 2 \int_{A \cap F} x_2(z) y_2(z) dz.$$

Les fonctions x et y sont positives sur $A \cap F$. Les intégrales sur cet ensemble sont donc positives. Nous pouvons donc conclure que $(\star) \geq 0$. En reprenant la relation (2.2), nous établissons que

$$\|x + y\|^2 \geq \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Deux cas sont alors possibles, supposons que $\|x\| > \|y\|$ alors, $\|x + y\|^2 \geq 2\|x\|^2$. Cela entraîne que $\|x + y\| \geq \sqrt{2}\|x\| = \sqrt{2} \max \{\|x\|, \|y\|\}$. Dans le cas contraire, $\|y\|$ est la valeur maximale entre les deux normes et nous obtenons $\|x + y\|^2 \geq 2\|y\|^2$ ou encore, $\|x + y\| \geq \sqrt{2}\|y\| = \sqrt{2} \max \{\|x\|, \|y\|\}$. Le cône H_+ est bien un cône normal.

(ii) *Troisième relation d'équivalence du Théorème 2.1*

Finalement, il reste à démontrer la relation c) du Théorème 2.1. Pour rappel, nous devons prouver que l'opérateur \bar{A} est un opérateur linéaire, fermé et de domaine dense sur H tel que l'opérateur $(I - \alpha \bar{A})^{-1} \in \mathcal{L}(H)_+$.

De plus, $\|(I - \alpha \bar{A})^{-n}\|_N \leq M / (1 - \alpha \gamma)^n$ pour tout $\alpha > 0$ tel que $\alpha \gamma > 1$ et pour tout $n > 1$.

(a) *Linéarité de l'opérateur \bar{A}*

La linéarité de l'opérateur est immédiate car $\bar{A} = \begin{pmatrix} -v \frac{d}{dz} - k_0 & 0 \\ bk_0 & -v \frac{d}{dz} \end{pmatrix}$. C'est un opérateur de dérivation et ces derniers sont linéaires.

(b) *Fermeture de l'opérateur \bar{A}*

Afin de montrer que l'opérateur \bar{A} est fermé, utilisons le Théorème 2.2. Montrer la fermeture de \bar{A} revient donc à montrer que H est un espace de Banach, que \bar{A} est un opérateur linéaire surjectif de domaine $D(\bar{A}) \subset H$ et que \bar{A} est inversible avec $\bar{A}^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Comme cela a déjà été énoncé, nous sommes dans le cadre d'un espace H de Hilbert. Cela entraîne donc que H est un espace de Banach. De plus, la linéarité vient d'être établie dans le paragraphe précédent. La condition sur le domaine de l'opérateur \bar{A} est respectée. En effet, celui-ci est donné par

$$D(\bar{A}) = \left\{ x = (x_1, x_2)^T \in H : x \text{ est absolument continu, } \frac{dx}{dz} \in H \text{ et } x_1(0) = 0 = x_2(0) \right\} \subset H.$$

Nous devons également montrer que l'opérateur est surjectif. En utilisant la définition de surjectivité, cela revient à montrer que $\forall y \in H, \exists x \in D(\bar{A})$ tel que $\bar{A}x = y$. Prenons donc un élément y quelconque dans H et trouvons l'élément x dans le domaine de \bar{A} qui vérifie $\bar{A}x = y$. Pour ce faire, nous allons résoudre $x = \bar{A}^{-1}y$. Le détail n'est pas fourni dans ce rapport néanmoins la méthode utilisée est similaire à celle qui sera employée pour le calcul de l'opérateur $(I - \alpha\bar{A})^{-1}$, développée dans la suite de cette preuve.

Nous obtenons alors une solution $x = (x_1, x_2)^T$ avec

$$\begin{cases} x_1 = \frac{y_1}{k_0} \left(e^{\frac{-k_0 z}{v}} - 1 \right), \\ x_2 = \frac{z}{v} (-y_2 - by_1) - \frac{by_1}{k_0} \left(e^{\frac{-k_0 z}{v}} - 1 \right). \end{cases}$$

Ces valeurs ont été construites de façon à vérifier les conditions aux bords. Nous avons donc bien $x_1(0) = x_2(0) = 0$. De plus, x est absolument continue car les fonctions x_1 et x_2 sont infiniment dérivables. Finalement, la dérivée de x par rapport à z appartient à l'espace H car la dérivée de la fonction x est composée de deux fonctions mesurables de carré intégrable sur $[0, L]$. La fonction x trouvée appartient donc au domaine de l'opérateur \bar{A} . Nous pouvons alors déduire que l'opérateur est surjectif. Afin de conclure au sujet de la fermeture de l'opérateur \bar{A} , il reste à montrer qu'il est inversible et que son inverse est linéaire et borné sur H . Etant donné que nous venons d'observer que \bar{A} est surjectif, il suffit de prouver que cet opérateur est injectif pour conclure sur son inversibilité. Cela revient à dire que nous devons mettre en évidence le fait que $\forall x \in D(\bar{A}), \bar{A}x = 0 \Rightarrow x = 0$. Soit $x \in D(\bar{A})$, nous avons que

$$\begin{aligned} \bar{A}x &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -v \frac{d}{dz} - k_0 & 0 \\ bk_0 & -v \frac{d}{dz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= 0, \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -v \frac{dx_1}{dz} - k_0 x_1 = 0, \\ bk_0 x_1 - v \frac{dx_2}{dz} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Nous devons donc résoudre deux équations différentielles ordinaires. La première peut se réécrire

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{-k_0}{v} dz.$$

La solution de cette équation est presque immédiate et est donnée par $x_1 = C e^{\frac{-k_0}{v} z}$. Or, par hypothèse, $x = (x_1, x_2)^T$ est dans le domaine de l'opérateur \bar{A} . Nous avons donc que $x_1(0) = 0$. Il en suit que la constante C doit être nulle. Cela implique que $x_1 = 0$. Passons à présent à la seconde équation différentielle et remplaçons x_1 par zéro dans celle-ci. Nous avons donc

$$v \frac{dx_2}{dz} = 0.$$

La solution de cette équation est donc que la fonction x_2 est une constante. Afin d'obtenir une solution finale x dans le domaine de \bar{A} , la seule solution possible est que x_2 soit la fonction nulle. Nous venons donc de montrer que $\bar{A}x = 0$ entraîne que $x = (x_1, x_2)^T = 0$. L'opérateur \bar{A} est injectif. Il est également surjectif. C'est donc un opérateur inversible. Maintenant que ce point a été établi, montrons que l'opérateur inverse \bar{A}^{-1} est linéaire et borné sur H . Celui-ci est déduit du développement sur la surjectivité et est donné par la matrice

$$\bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_0} \left(e^{\frac{-k_0}{v}z} - 1 \right) & 0 \\ -\left(\frac{b}{v}z + \frac{b}{k_0} \left(e^{\frac{-k_0}{v}z} - 1 \right) \right) & \frac{-z}{v} \end{pmatrix}.$$

Cet opérateur a été construit de façon à être à valeurs dans H . C'est un opérateur linéaire et continu. Il est donc bien linéaire et borné. Toutes les hypothèses du Théorème 2.2 sont réunies. Nous pouvons donc conclure que l'opérateur \bar{A} est fermé.

(c) *Densité de l'opérateur \bar{A}*

La densité de l'opérateur a été établie dans l'article [19]. Nous n'allons donc pas détailler ce point dans cette preuve.

(d) *Calcul de l'opérateur $(I - \alpha\bar{A})^{-1}$*

Une autre hypothèse à vérifier est que l'opérateur $(I - \alpha\bar{A})^{-1}$ est un opérateur positif linéaire borné sur H . Pour ce faire, calculons cet opérateur. Considérons $x = (x_1, x_2)^T$ et $y = (y_1, y_2)^T \in H$ tel que

$$(I - \alpha\bar{A})^{-1}y = x. \quad (2.3)$$

En isolant y nous obtenons

$$y = (I - \alpha\bar{A})x.$$

A présent, passons à l'écriture matricielle

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} -v\frac{d}{dz} - k_0 & 0 \\ bk_0 & -v\frac{d}{dz} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + \alpha v \frac{dx_1}{dz} + \alpha k_0 x_1 \\ x_2 - \alpha b k_0 x_1 + \alpha v \frac{dx_2}{dz} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array}$$

Nous obtenons alors deux équations différentielles à résoudre afin d'obtenir l'opérateur résolvant. Pour la résolution de ces deux équations nous allons, dans un premier temps, solutionner l'équation homogène et, dans un second temps, faire varier

la constante. Débutons par la résolution de l'équation (a). L'équation homogène est

$$x_1 + \alpha v \frac{dx_1}{dz} + \alpha k_0 x_1 = 0,$$

ou de façon équivalente

$$\alpha v \frac{dx_1}{dz} = -(1 + \alpha k_0)x_1.$$

Ensuite, nous isolons les termes en x_1 et intégrons

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int \frac{-(1 + \alpha k_0)}{\alpha v} dz.$$

Cela nous donne

$$\ln|x_1| = \frac{-(1 + \alpha k_0)}{\alpha v} z + C.$$

En prenant l'exponentielle des deux côtés de l'équation, nous obtenons

$$x_{1H} = K e^{\frac{-(1 + \alpha k_0)z}{\alpha v}}, \quad (2.4)$$

qui est la solution de l'équation homogène. A présent, faisons varier la constante c'est-à-dire, supposons que la constante K dépend de z et injectons la solution homogène dans l'équation (a). Cela nous donne la relation

$$\begin{aligned} y_1 = \alpha v \left(\frac{dK}{dz} e^{\frac{-(1 + \alpha k_0)z}{\alpha v}} - \frac{(1 + \alpha k_0)}{\alpha v} K e^{\frac{-(1 + \alpha k_0)z}{\alpha v}} \right) \\ + \alpha k_0 K e^{\frac{-(1 + \alpha k_0)z}{\alpha v}} + K e^{\frac{-(1 + \alpha k_0)z}{\alpha v}}. \end{aligned}$$

En simplifiant ce qui peut l'être, nous obtenons

$$y_1 = \alpha v \frac{dK}{dz} e^{\frac{-(1 + \alpha k_0)z}{\alpha v}}.$$

En isolant dK dans cette équation et en intégrant, nous avons

$$K(z) = \frac{y_1}{1 + \alpha k_0} e^{\frac{(1 + \alpha k_0)z}{\alpha v}}.$$

Finalement, en injectant cette solution dans la relation (2.4), nous obtenons

$$x_{1P} = \frac{y_1}{1 + \alpha k_0} e^{\frac{(1 + \alpha k_0)z}{\alpha v}} e^{\frac{-(1 + \alpha k_0)z}{\alpha v}}$$

ou encore,

$$x_{1P} = \frac{y_1}{1 + \alpha k_0}.$$

La solution générale est composée de la somme des solutions homogène et particulière. Elle vaut donc

$$x_1 = K e^{\frac{-(1+\alpha k_0)z}{\alpha v}} + \frac{y_1}{1 + \alpha k_0}.$$

Il reste à déterminer la constante K . Pour ce faire, nous allons nous aider des conditions aux bords du problème. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} x_1(z=0) &= K + \frac{y_1}{1 + \alpha k_0}, \\ \Leftrightarrow 0 &= K + \frac{y_1}{1 + \alpha k_0}, \\ \Leftrightarrow K &= \frac{-y_1}{1 + \alpha k_0}. \end{aligned}$$

La solution de cette première équation devient

$$x_1 = \frac{y_1}{1 + \alpha k_0} \left(1 - e^{\frac{-(1+\alpha k_0)z}{\alpha v}} \right).$$

Nous pouvons procéder de façon similaire pour l'équation (b) en remplaçant x_1 par la solution que nous venons de trouver. Ce développement est disponible dans l'annexe [A](#). La résolution de la seconde équation donne

$$x_2 = b y_1 \left(\frac{\alpha k_0}{1 + \alpha k_0} + \left(\frac{1}{1 + \alpha k_0} e^{\frac{-k_0}{v} z} - 1 \right) e^{\frac{-z}{\alpha v}} \right) + y_2 \left(1 - e^{\frac{-z}{\alpha v}} \right).$$

En remplaçant toutes ces données dans l'équation [\(2.3\)](#), nous trouvons l'équation de l'opérateur résolvant associé au générateur \bar{A} . Celui-ci est donné par

$$\begin{aligned} (I - \alpha \bar{A})^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \alpha k_0} \left(1 - e^{\frac{-(1+\alpha k_0)z}{\alpha v}} \right) & 0 \\ b \left(\frac{\alpha k_0}{1 + \alpha k_0} + \left(\frac{1}{1 + \alpha k_0} e^{\frac{-k_0}{v} z} - 1 \right) e^{\frac{-z}{\alpha v}} \right) & 1 - e^{\frac{-z}{\alpha v}} \end{pmatrix}}_{(I - \alpha \bar{A})^{-1}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(e) *Appartenance de $(I - \alpha \bar{A})^{-1}$ à $\mathcal{L}(H)_+$*

Cet opérateur est un opérateur dans H , linéaire et continu. Il est donc bien linéaire et borné. L'appartenance de l'opérateur au cône positif de H se montre facilement dans le cas des éléments en position $(1, 1)$ et $(2, 2)$. En effet, pour $\alpha \geq 0$, les termes $1 + \alpha k_0$ et αv sont positifs. Les termes dans l'exponentielle sont alors négatifs et donc l'exponentielle prend toujours des valeurs plus petites que 1. Cela implique que \bar{A}_{11} et \bar{A}_{22} soient positifs. La positivité de \bar{A}_{21} n'est pas immédiate. Néanmoins, la remarque qui suit le théorème permet de conclure sans forcément démontrer cette propriété.

(f) Inégalité $\|(I - \alpha\bar{A})^{-n}\| \leq M/(1 - \alpha\gamma)^n$

Afin de conclure, nous devons montrer que $\|(I - \alpha\bar{A})^{-n}\|_N \leq M/(1 - \alpha\gamma)^n$ pour tout $\alpha > 0$ tel que $\alpha\gamma < 1$ et pour tout $n > 1$. Par intuition, nous pensons que $M = 1$ et $\gamma = 0$ car nous sommes probablement dans le cas d'un semi-groupe de contraction.

Il suffit alors de montrer que $\|(I - \alpha\bar{A})^{-1}\|_N \leq 1$. En effet, si cette inégalité est établie, nous obtenons alors que

$$\|(I - \alpha\bar{A})^{-n}\|_N \leq \|(I - \alpha\bar{A})^{-1}\|_N^n \leq 1^n = 1.$$

Cela est bien le résultat qu'il fallait démontrer. Montrons alors que

$$\|(I - \alpha\bar{A})^{-1}x\|_N \leq \|x\|_N, \quad \forall x \in H, \quad (2.5)$$

où $\|x\|_N = \inf \underbrace{\{\lambda \geq 0 : -\lambda u \leq x \leq \lambda v \text{ pour } u, v \in H_1\}}_{:=A}$.

Or, nous avons que $(I - \alpha\bar{A})^{-1}x = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ f_2 & f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 x_1 \\ f_2 x_1 + f_3 x_2 \end{pmatrix}$. De ce fait,

$$\|(I - \alpha\bar{A})^{-1}x\|_N = \inf \underbrace{\left\{ \lambda \geq 0 : \exists u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in H_1 \text{ tel que } -\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} f_1 x_1 \\ f_2 x_1 + f_3 x_2 \end{pmatrix} \leq \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\}}_{:=B}.$$

Ce qui entraîne que l'inégalité (2.5) est vérifiée si $A \subseteq B$ car nous aurons ainsi que $\inf B \leq \inf A$. Nous allons prouver cela pour chacune des composantes.

Dans un premier temps, montrons que $A_1 \subseteq B_1$. Soit $\lambda \geq 0$, montrer l'inclusion de A_1 dans B_1 est équivalent à prouver qu'il existe u_1 et v_1 tels que $\|u_1\|$ et $\|v_1\|$ soient inférieures à 1 et tels que

$$-\frac{\lambda u_1}{f_1} \leq -\lambda u_1 \leq x_1 \leq \lambda v_1 \leq \frac{\lambda v_1}{f_1}.$$

Supposons que

$$\begin{aligned} \frac{-\lambda u_1}{f_1} &\leq -\lambda u_1, \\ \Leftrightarrow u_1 &\geq u_1 f_1, \\ \Leftrightarrow u_1 (1 - f_1) &\geq 0. \end{aligned}$$

Or, nous avons que $f_1 = \frac{1}{1 + \alpha k_0} \left(1 - e^{\frac{-(1 + \alpha k_0)z}{\alpha v}} \right)$ est strictement inférieur à 1, ce qui entraîne que $(1 - f_1) > 0$. D'où

$$\Leftrightarrow u_1 > 0.$$

De façon analogue, supposons que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda v_1}{f_1} &\geq \lambda v_1, \\ \Leftrightarrow v_1 &\geq v_1 f_1, \\ \Leftrightarrow v_1 (1 - f_1) &\geq 0. \end{aligned}$$

A nouveau, nous allons utiliser le fait que $(1 - f_1) > 0$. Ce qui nous donne

$$\Leftrightarrow v_1 > 0.$$

Ainsi, en prenant $u_1 > 0$ tel que $\|u_1\| < 1$ et $v_1 > 0$ tel que $\|v_1\| < 1$, il existe u_1 et v_1 tels que $A_1 \subseteq B_1$.

Dans un second temps, intéressons-nous aux secondes composantes et tentons de prouver que $A_2 \subseteq B_2$. Auparavant, effectuons quelques modifications sur l'ensemble B_2 . Par définition,

$$\begin{aligned} B_2 &= \{ \lambda \geq 0 : \exists u_2, v_2 \text{ tels que } \|u_2\| \leq 1 \text{ et } \|v_2\| \leq 1 \text{ tel que} \\ &\quad -\lambda u_2 \leq f_2 x_1 + f_3 x_2 \leq \lambda v_2 \}, \\ &= \{ \lambda \geq 0 : \exists u_2, v_2 \text{ tels que } \|u_2\| \leq 1 \text{ et } \|v_2\| \leq 1 \text{ tel que} \\ &\quad -\lambda u_2 - f_2 x_1 \leq f_3 x_2 \leq \lambda v_2 - f_2 x_1 \}, \\ &= \left\{ \lambda \geq 0 : \exists u_2, v_2 \text{ tels que } \|u_2\| \leq 1 \text{ et } \|v_2\| \leq 1 \text{ tel que} \right. \\ &\quad \left. \frac{-\lambda u_2 - f_2 x_1}{f_3} \leq x_2 \leq \frac{\lambda v_2 - f_2 x_1}{f_3} \right\}. \end{aligned}$$

Pour prouver que $A_2 \subseteq B_2$ nous allons démontrer que

$$\frac{-\lambda u_2 - f_2 x_1}{f_3} \leq -\lambda u_2 \leq x_2 \leq \lambda v_2 \leq \frac{\lambda v_2 - f_2 x_1}{f_3}.$$

Nous allons procéder de la même façon que précédemment. Cependant, certaines étapes supplémentaires interviennent. Soit $\lambda > 0$, supposons que

$$\begin{aligned} \frac{-\lambda u_2 - f_2 x_1}{f_3} &\leq -\lambda u_2, \\ \Leftrightarrow \lambda u_2 \left(\frac{-1}{f_3} + 1 \right) &\leq \frac{f_2}{f_3} x_1. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que la fonction $f_3 = 1 - e^{\frac{-z}{\alpha v}}$ est positive pour tout $z \in [0, L]$, nous pouvons encore écrire

$$\Leftrightarrow \lambda u_2 (f_3 - 1) \leq f_2 x_1.$$

En outre, nous avons mis en évidence pour B_1 que $x_1 \leq \lambda v_1$. Nous obtenons alors que

$$\Leftrightarrow \lambda u_2 (f_3 - 1) \leq f_2 \lambda v_1.$$

En outre, $f_3 - 1$ est négatif, ce qui nous donne

$$\Leftrightarrow u_2 \geq \frac{f_2}{f_3 - 1} v_1.$$

Finalement, en utilisant le fait que $f_2 > 0$ et $v_1 > 0$, comme nous l'avons montré précédemment, nous obtenons que

$$\Rightarrow u_2 \geq 0.$$

Par un développement similaire au précédent, nous obtenons pour v_2 que

$$x_2 \leq \lambda v_2 \leq \frac{\lambda v_2 - f_2 x_1}{f_3} \quad \text{si} \quad v_2 \leq \frac{f_2 u_1}{1 - f_3}.$$

De ce fait, il est possible de trouver $u_2 \geq 0$ avec $\|u_2\| \leq 1$ et $v_2 \leq (f_2 u_1) / (1 - f_3)$ avec $\|v_2\| \leq 1$. En effet, il suffit de trouver deux vecteurs vérifiant les deux inégalités mises en évidence précédemment et de les normaliser. Les vecteurs ainsi obtenus respecteront les inégalités et seront de norme 1. Il existe ainsi u_2 et v_2 tels que $A_2 \subseteq B_2$.

Nous avons donc démontré que $\|(I - \alpha \bar{A})^{-1} x\|_N \leq \|x\|_N, \forall x \in H$.

Ainsi, en appliquant le Théorème 2.1, nous pouvons conclure qu'il y a génération d'un semi-groupe fortement continu positif $\bar{T}(t)$ par l'opérateur \bar{A} .

□

Remarque :

Nous travaillons avec un opérateur triangulaire. Au lieu de vérifier la preuve pour cet opérateur dans sa globalité, nous aurions pu travailler en 4 temps. Premièrement, nous aurions pu vérifier le théorème de génération de semi-groupes positifs pour l'opérateur \bar{A}_{22} . Ensuite, nous pourrions conclure que l'opérateur \bar{A}_{11} , défini en (2.1), génère également un semi-groupe positif puisque cet opérateur est un simple shift de l'opérateur \bar{A}_{22} , également défini en (2.1). Or, il existe un théorème dans [10, Chapitre 6, Section 2] qui affirme que si un opérateur génère un semi-groupe positif et qu'un autre opérateur positif est linéaire borné sur un espace de Banach, alors l'addition des deux opérateurs génère un semi-groupe positif. Dans notre cas, l'opérateur I est un opérateur positif. Ce qui entraîne que \bar{A}_{11} génère un semi-groupe positif. L'opérateur diagonal formé d'opérateurs générant des semi-groupes positifs génère un semi-groupe positif. La dernière étape consiste à noter que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ bk_0 & 0 \end{pmatrix}$ est un opérateur linéaire borné positif. A nouveau, nous pouvons donc additionner l'opérateur diagonal avec cet opérateur positif pour former l'opérateur \bar{A} et conclure la génération d'un semi-groupe positif.

Chapitre 3

Génération de semi-groupes positifs pour le réacteur à dispersion axiale

Nous allons maintenant entamer la partie du travail concernant les réacteurs tubulaires avec dispersion axiale. De ce fait, nous allons nous intéresser à l'opérateur A défini par la relation (1.9).

Pour rappel,

$$A = A_2 + A_1 + A_0 \quad (\text{où } A_2, A_1 \text{ et } A_0 \text{ sont définis par (1.9)})$$
$$= \begin{pmatrix} D_a \frac{d^2}{dz^2} - v \frac{d}{dz} - k_0 & 0 \\ bk_0 & D_a \frac{d^2}{dz^2} - v \frac{d}{dz} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$:= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

et son domaine est donné par (1.10), à savoir

$$D(A) = \left\{ x = (x_1, x_2)^T \in H : x, \frac{dx}{dz} \in H \text{ et sont absolument continus,} \right. \\ \left. \frac{d^2x}{dz^2} \in H, D_a \frac{dx_i}{dz}(0) - vx_i(0) = 0, D_a \frac{dx_i}{dz}(L) = 0, \text{ pour } i = 1, 2 \right\}. \quad (3.3)$$

3.1 Génération du semi-groupe

Dans cette section, nous prouverons que le semi-groupe $T(t)$ généré par l'opérateur A est positif. Nous démontrerons donc, dans un premier temps, qu'il y a génération d'un semi-groupe. Pour ce faire, nous allons analyser séparément les opérateurs A_{11} et A_{22} . Ensuite, nous prouverons que ce semi-groupe est positif.

Par la suite, nous aurons recours, à plusieurs reprises, aux propriétés des opérateurs de Sturm-Liouville. Dans un premier temps, ces opérateurs seront introduits en utilisant la définition provenant de l'article [11]. Nous aurons ainsi tous les outils à notre disposition pour montrer que certains opérateurs avec lesquels nous travaillons, sont des opérateurs de Sturm-Liouville. Finalement, nous serons aptes à appliquer les propriétés appropriées.

Définition 3.1. Opérateur de Sturm-Liouville

Un opérateur A est un opérateur de Sturm-Liouville défini sur l'espace de Banach réel $L^2(0, L)$, si et seulement si,

$$Af = \frac{1}{\rho(z)} \left(-\frac{d}{dz} \left(p(z) \frac{df}{dz} \right) + q(z)f \right),$$

où $p(z)$, $\frac{dp}{dz}(z)$, $q(z)$ et $\rho(z)$ sont des fonctions continues sur $[0, L]$ à valeurs réelles telles que $\rho(z)$ et $p(z)$ sont strictement positives $\forall z$.

Le domaine de A est

$$D(A) = \left\{ f \in L^2(0, L) : f, \frac{df}{dz} \in L^2(0, L) \text{ et sont absolument continus, } \frac{d^2f}{dz^2} \in L^2(0, L) \right. \\ \left. \text{et } P_1 f = \Delta_1 \frac{df}{dz}(0) - v_1 f(0) = 0; P_2 f = \Delta_2 \frac{df}{dz}(L) - v_2 f(L) = 0 \right\}, \quad (3.4)$$

où Δ_1, Δ_2, v_1 et v_2 sont des constantes réelles vérifiant $|\Delta_1| + |v_1| > 0$ et $|\Delta_2| + |v_2| > 0$.

Maintenant que nous avons défini un opérateur de Sturm-Liouville, nous pouvons introduire trois propriétés s'appliquant à de tels opérateurs et qui nous seront utiles par la suite. La première est inspirée par les références [5] et [13, Chapitre 8, Section 6, théorème 97], tandis que la deuxième et la troisième proviennent du livre [4, Chapitre 2, Section 6, exercice 10]. Ces deux propositions font appel à la norme pondérée définie par,

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle_\rho = \int_0^L \rho(z) \phi_m(z) \phi_n(z) dz. \quad (3.5)$$

Propriété 3.1.

Soit A un opérateur de Sturm-Liouville défini sur son domaine $D(A)$.

L'ensemble de vecteurs propres normalisés $(\phi_n)_{n \geq 1}$ correspondant aux valeurs propres $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ forme une base orthonormale pour le produit scalaire pondéré avec ρ défini en (3.5) : $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$.

En d'autres termes,

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle_\rho = \delta_{nm}.$$

Dans la suite, nous aborderons la notion d'équivalence de bases orthonormales. Pour rappel, une base (x_n) sur un espace de Hilbert H est équivalente à une base (y_n) pour H s'il existe un isomorphisme $S : H \rightarrow H$ tel que $Sx_n = y_n \forall n$. Grâce à cette définition, il est possible de montrer que toutes bases orthonormales sont équivalentes. Ce résultat est admis dans le cadre de ce mémoire.

Propriété 3.2. Fermeture d'un opérateur de Sturm-Liouville

Soit A un opérateur de Sturm-Liouville.

L'opérateur A est fermé sur $L^2(a, b)$ pour le produit scalaire usuel et le produit scalaire pondéré défini en (3.5).

Le fait que ce résultat soit valable pour le produit scalaire usuel et pour le produit scalaire pondéré n'est pas étonnant. En effet, nous pouvons montrer que ces deux normes sont équivalentes.

Par définition, N_1 et N_2 sont équivalentes si $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in E, \lambda N_1(x) \leq N_2(x) \leq \mu N_1(x).$$

Ainsi, nous devons prouver que

$$\lambda \int_0^L \rho(z) \phi_m(z) \phi_n(z) dz \leq \int_0^L \phi_m(z) \phi_n(z) dz \leq \mu \int_0^L \rho(z) \phi_m(z) \phi_n(z) dz. \quad (3.6)$$

Or, $\rho(z)$ est continue sur le compact $[0, L]$. De ce fait, la fonction atteint ses bornes et possède ainsi un maximum et un minimum. Posons $\rho(a)$ et $\rho(b)$ respectivement le minimum et le maximum de la fonction $\rho(z)$ sur $[0, L]$. Finalement, en prenant $\lambda = (\rho(b))^{-1}$ et en majorant $\rho(z)$ par $\rho(b)$, nous retrouvons la première inégalité de (3.6). De façon similaire, en prenant $\mu = (\rho(a))^{-1}$ et en minorant $\rho(z)$ par $\rho(a)$, nous retrouvons la seconde inégalité de (3.6). Remarquons que $\rho(a)$ et $\rho(b)$ sont des réels non nuls car la fonction $\rho(z)$ est strictement positive. Ils peuvent donc être mis au dénominateur d'une fraction sans nécessité de conditions supplémentaires.

A présent, mettons en évidence la génération d'un semi-groupe $T(t)$ par l'opérateur A . Nous effectuons cela en considérant de façon séparée les opérateurs A_{11} et A_{22} . Pour prouver la génération d'un semi-groupe, nous démontrerons tout d'abord que nous travaillons avec un opérateur spectral de Riesz en nous inspirant de la démarche qui a été mise en oeuvre dans l'article [19]. Ensuite, nous appliquerons un théorème de génération de semi-groupe par des opérateurs de Riesz repris dans le document [4, Chapitre 2, Section 3, Théorème 2.3.5].

Dans un premier temps, rappelons la définition d'opérateur spectral de Riesz de le livre [4, Chapitre 2, Section 3, Définition 2.3.4] qui sera employée dans la suite.

Définition 3.2. Opérateur spectral de Riesz

Supposons que A soit un opérateur linéaire et fermé sur un espace de Hilbert Z avec des valeurs propres simples $(\lambda_n)_{n \geq 1}$.

Supposons également que les vecteurs propres correspondants, $(\phi_n)_{n \geq 1}$, forment une base de Riesz dans Z .

Si la fermeture (l'adhérence) de l'ensemble des valeurs propre $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ est totalement déconnectée alors, nous appelons A un opérateur spectral de Riesz.

Dans cette définition, nous voyons apparaître le terme "totalement déconnecté". Un rappel de vocabulaire semble intéressant. Il provient également du livre [4].

Définition 3.3. Déconnexion totale

Dans la définition précédente, le terme totalement déconnecté signifie que deux points quelconques $\lambda, \mu \in \overline{(\lambda_n)_{n \geq 1}}$ ne peuvent être reliés par un segment qui est entièrement dans $\overline{(\lambda_n)_{n \geq 1}}$. En d'autres termes, cela signifie que

$$\forall \mu, \lambda \in (\lambda_n)_{n \geq 1}, [\mu, \lambda] \not\subset \overline{(\lambda_n)_{n \geq 1}}.$$

Intéressons-nous à l'opérateur A_{11} .

Lemme 3.1. *L'opérateur A_{11} est un opérateur spectral de Riesz.*

Démonstration. Comme cela a été annoncé précédemment, cette preuve consiste à vérifier chacune des hypothèses de la Définition 3.2.

Commençons par démontrer que A_{11} est un opérateur linéaire fermé sur l'espace H , ce-dernier étant un espace de Hilbert.

i) *Linéarité de A_{11}*

L'opérateur A_{11} est un opérateur de dérivation, il est donc linéaire.

ii) *Fermeture de A_{11}*

Concernant la fermeture, nous allons appliquer la Propriété 3.2 pour l'opérateur $-A_{11}$. De fait, montrer qu'un opérateur $-B$ est fermé permet de conclure à la fermeture d'opérateur B . La démonstration de cette proposition a été réalisée dans l'annexe B. Démontrons donc que l'opérateur $-A_{11}$ est un opérateur de Sturm-Liouville en nous référant à la Définition 3.1. L'opérateur

$$-A_{11}f = -D_a \frac{d^2 f}{dz^2} + v \frac{df}{dz} + k_0 f$$

peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{\rho(z)} \left[-\frac{d}{dz} \left(p(z) \frac{df}{dz} \right) + q(z) f \right].$$

Effectivement, intéressons-nous à l'expression équivalente suivante,

$$\frac{1}{\rho(z)} \left[\frac{-dp}{dz} \frac{df}{dz} - p(z) \frac{d^2 f}{dz^2} + q(z) f \right]$$

et égalisons la à $-A_{11}f$. Il en découle les égalités suivantes,

$$\begin{aligned} \begin{cases} -D_a = \frac{-p(z)}{\rho(z)}, \\ v = \frac{-1}{\rho(z)} \frac{dp}{dz}, \\ k_0 = \frac{q(z)}{\rho(z)}. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} p(z) = D_a \rho(z), \\ v = \frac{-1}{\rho(z)} \frac{dp}{dz}, \\ q(z) = k_0 \rho(z). \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} p(z) = D_a \rho(z), \\ v = -D_a \frac{d\rho(z)}{dz} \frac{1}{\rho(z)}, \\ q(z) = k_0 \rho(z). \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p(z) = D_a \rho(z), \\ \frac{-v}{D_a} dz = \frac{d\rho(z)}{\rho(z)}, \\ q(z) = k_0 \rho(z). \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho(z) = e^{\frac{-v}{D_a} z}, \\ p(z) = D_a e^{\frac{-v}{D_a} z}, \\ q(z) = k_0 e^{\frac{-v}{D_a} z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme les fonctions, $\rho(z)$, $p(z)$ et $q(z)$ sont des fonctions continues sur $[0, L]$ à valeurs réelles, tout comme la fonction $\frac{dp}{dz} = -v e^{\frac{-v}{D_a} z}$ et que, de plus, les fonctions $\rho(z)$ et $p(z)$ sont strictement positives, l'opérateur $-A_{11}$ est donc un opérateur de Sturm-Liouville. Nous en déduisons alors, en utilisant la Propriété 3.2 que $-A_{11}$ et donc A_{11} sont des opérateurs fermés sur l'espace $L^2(0, L)$, espace de Hilbert.

iii) *Propriété des valeurs propres de A_{11} (réelles et simples) :*

L'hypothèse que nous devons à présent vérifier a pour sujet les valeurs propres de l'opérateur A_{11} . Nous allons donc tout d'abord calculer ces valeurs propres. Ce développement est proposé dans l'annexe [C](#). Les valeurs propres obtenues sont données par l'expression

$$\lambda_n = - \left(\frac{s_n^2 + v^2}{4D_a} + k_0 \right), \quad (3.7)$$

où les $(s_n)_{n \geq 1}$ sont les solutions de l'équation

$$\tan \left(\frac{L}{2D_a} s \right) = \frac{2vs}{s^2 - v^2}, \quad s > 0 \quad \text{et} \quad 0 < s_n < s_{n+1} \quad \forall n \geq 1. \quad (3.8)$$

Ces valeurs propres sont réelles et simples car elles sont toutes distinctes 2 à 2 et que, comme nous le verrons dans la suite, nous avons une base orthonormale de vecteurs propres.

iv) *Base de Riesz des vecteurs propres de A_{11}*

Il est à présent nécessaire de connaître les vecteurs propres de l'opérateur A_{11} . Suite à un calcul présent dans l'annexe [C](#), nous avons que

$$\phi_n(z) = K_n e^{\frac{v}{2D_a} z} \left(\cos \left(\frac{s_n}{2D_a} z \right) + \frac{v}{s_n} \sin \left(\frac{s_n}{2D_a} z \right) \right),$$

où K_n est une constante non nulle. Ces vecteurs propres forment une base de Riesz. En effet, une base (x_n) d'un espace de Hilbert forme une base de Riesz pour H si elle est équivalente à toute base orthonormale de H . Or, nous avons montré précédemment que $-A_{11}$ est un opérateur de Sturm-Liouville. En utilisant la Propriété [3.1](#), nous avons que l'ensemble des vecteurs propres normalisés de $-A_{11}$ forme une base orthonormale pour le produit scalaire pondéré. En outre, nous savons que les valeurs propres de A_{11} sont opposées à celles de $-A_{11}$ et que ses vecteurs propres sont identiques. Donc, l'ensemble des vecteurs propres normalisés $(\phi_n)_{n \geq 1}$ de A_{11} forme une base orthonormale pour le produit scalaire pondéré. Cette base est alors équivalente à toutes les bases orthonormales de l'espace de Hilbert $L^2(0, L)$. Nous avons donc trouvé un produit scalaire sur $L^2(0, L)$, le produit scalaire pondéré, équivalent au produit scalaire usuel, pour lequel les $(\phi_n)_{n \geq 1}$ forment une base de Riesz de $L^2(0, L)$.

v) *Propriété des valeurs propres de A_{11} (déconnexion totale)*

Finalement, il reste à montrer que la fermeture de l'ensemble des valeurs propres $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ est totalement déconnectée. Pour ce faire, nous allons utiliser une propriété de convergence de ces valeurs propres,

$$s_n - 2(n-1)\pi \frac{D_a}{L} \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Dans un premier temps, analysons le cas de la diffusion pure. C'est-à dire, le cas où la vitesse superficielle du fluide v est nulle. Afin de trouver les solutions s_n , nous devons résoudre l'équation

$$\tan\left(\frac{L}{2D_a}s\right) = 0.$$

Les solutions de cette équation sont données par $s = 0 + 2\frac{Da}{L}k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$). Notons que dans le cas de la diffusion pure, $s = 0$ est une solution de l'équation.

D'où $s = \{0, 2\frac{Da}{L}\pi, 4\frac{Da}{L}\pi, 6\frac{Da}{L}\pi, \dots\} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, \dots\}$. Nous pouvons encore reformuler cela par

$$s_n = 2\frac{Da}{L}(n-1)\pi, \text{ pour } n \geq 1.$$

Intéressons-nous cette fois au cas général. Nous allons analyser le comportement asymptotique de l'expression

$$\tan\left(\frac{L}{2D_a}s_n\right) = \frac{2vs_n}{s_n^2 - v^2}$$

car les solutions s_n cherchées vérifient l'équation (3.8). Quand n devient grand, les s_n tendent vers l'infini car nous avons une suite croissante non majorée de s_n . Ainsi, l'expression précédente devient, pour n qui tend vers l'infini,

$$\tan\left(\frac{L}{2D_a}s_n\right) \rightarrow 0.$$

Asymptotiquement, nous retombons sur le cas de la diffusion pure. Par continuité des solutions par rapport aux paramètres de l'équation, nous avons dès lors que

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{L}{2D_a}s_n\right) &\rightarrow 0, \\ \Rightarrow \frac{L}{2D_a}s_n &\rightarrow (n-1)\pi, \\ \Leftrightarrow s_n &\rightarrow (n-1)\pi \frac{2D_a}{L}, \\ \Leftrightarrow s_n - 2(n-1)\pi \frac{D_a}{L} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

A présent, montrons que la fermeture des valeurs propres de A_{11} est totalement déconnectée. Cela revient à démontrer que $\lambda_n \rightarrow -\infty$ quand $n \rightarrow \infty$ et que $|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$.

En effet, supposons par l'absurde que $\forall \mu, \lambda \in (\lambda_n)_{n \geq 1}, [\mu, \lambda] \subset \overline{(\lambda_n)_{n \geq 1}}$.

Soit $\mu, \lambda \in (\lambda_n)_{n \geq 1}$, par l'hypothèse du raisonnement par l'absurde, nous avons que $\forall \alpha \in [\lambda, \mu], \alpha \in \overline{(\lambda_n)_{n \geq 1}}$. Utilisons une propriété de fermeture d'un ensemble selon laquelle $\alpha \in \overline{(\lambda_n)_{n \geq 1}} \Leftrightarrow \alpha \in (\lambda_n)_{n \geq 1}$ où α est un point d'accumulation de $(\lambda_n)_{n \geq 1}$.

Dans le cas où $\alpha \in (\lambda_n)_{n \geq 1}$, nous constatons une contradiction avec la deuxième hypothèse, selon laquelle $|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \rightarrow \infty$ car $\alpha \in [\lambda, \mu]$, avec λ et $\mu \in (\lambda_n)_n$.

La première hypothèse, $\lambda_n \rightarrow -\infty$, contredit le fait que α soit un point d'accumulation de $(\lambda_n)_{n \geq 1}$. Effectivement, α est un point d'accumulation de $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ s'il existe une sous-suite $(\lambda_{n_k})_k$ de $(\lambda_n)_n$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k} = \alpha$. Or, toute suite extraite d'une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ tend respectivement vers $+\infty$ ou $-\infty$. Il en résulte que $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k} = -\infty$ et donc, α n'est pas un point d'accumulation de $(\lambda_n)_n$.

L'hypothèse par l'absurde est contredite et nous pouvons donc conclure que si

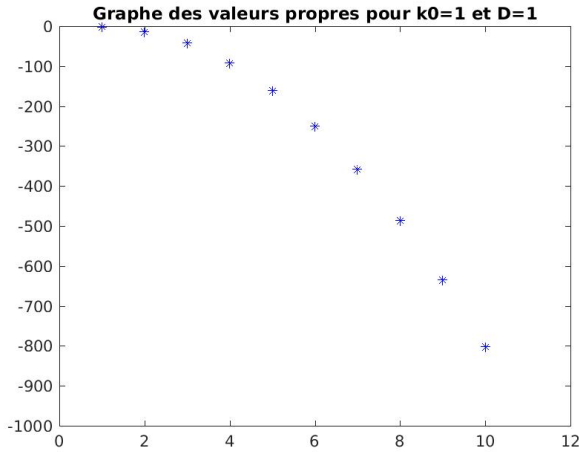
$$\left. \begin{array}{l} \lambda_n \rightarrow -\infty \text{ quand } n \rightarrow \infty, \\ |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \rightarrow \infty \text{ quand } n \rightarrow \infty, \end{array} \right\} \text{ alors } \forall \mu, \lambda \in (\lambda_n)_{n \geq 1}, [\mu, \lambda] \not\subseteq \overline{(\lambda_n)_{n \geq 1}}.$$

Démontrons donc ces deux hypothèses. Concernant la première, nous avons

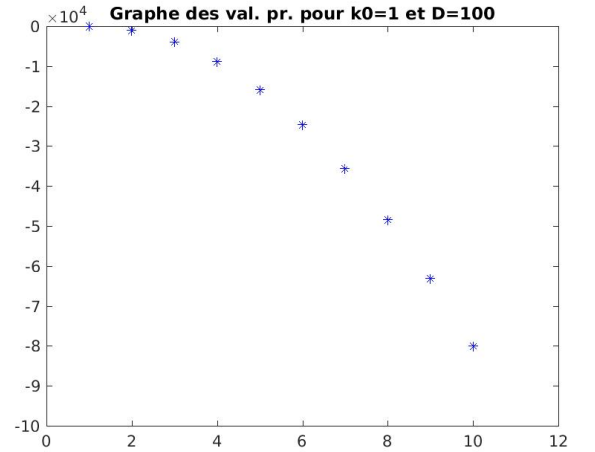
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} - \left(\frac{s_n^2 + v^2}{4D_a} + k_0 \right), \\ &= \frac{-1}{4D_a} \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n^2 + v^2) + \lim_{n \rightarrow \infty} k_0. \end{aligned}$$

Par la relation (3.9) précédente, nous savons que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 2(n-1)\pi \frac{D_a}{L}$, d'où

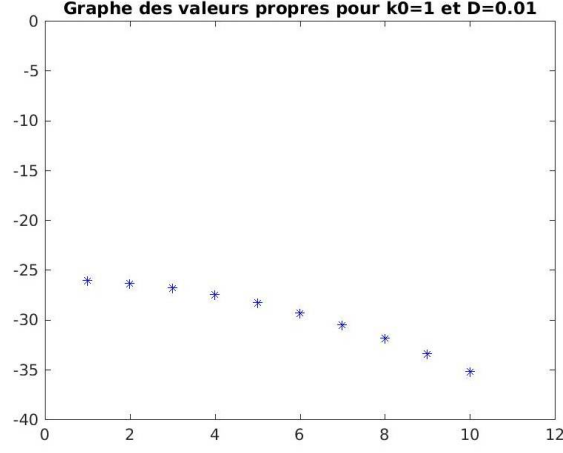
$$\begin{aligned} &= \frac{-1}{4D_a} \left[\left(2(n-1)\pi \frac{D_a}{L} \right)^2 + v^2 \right] + k_0, \\ &= -\infty. \end{aligned}$$



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.1 – Graphes des valeurs propres du système

Ce résultat peut être perçu graphiquement. En effet, la Figure 3.1 reprend les valeurs propres λ_n du système en fonction de n où les constantes v et L ont été fixées à 1. En effet, ce qui nous intéresse est le comportement des valeurs propres suivant que D_a soit grand ou petit par rapport à v . Nous observons alors que, indépendamment de la valeur de D_a , les valeurs propres tendent vers $-\infty$ lorsque n augmente même si le ratio entre D_a et v influence la vitesse de convergence. Notons que les graphiques n'ont été réalisés que pour des valeurs de k_0 égales à 1. En effet, en observant le terme k_0 dans l'expression des valeurs propres (3.7), nous constatons qu'il agit comme facteur de translation verticale constant sur chacune des valeurs propres. Il n'influencera donc pas l'allure générale et donc la convergence en l'infini des valeurs propres.

La deuxième hypothèse est également vérifiée. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\left(\frac{s_{n+1}^2 + v^2}{4D_a} + k_0 \right) + \left(\frac{s_n^2 + v^2}{4D_a} + k_0 \right) \right|, \\ &= \frac{1}{4D_a} \lim_{n \rightarrow \infty} | -s_{n+1}^2 + s_n^2 |. \end{aligned}$$

En utilisant la relation (3.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4D_a} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\left(2n\pi \frac{D_a}{L} \right)^2 + \left(2(n-1)\pi \frac{D_a}{L} \right)^2 \right|, \\ &= \frac{1}{4D_a} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -4n^2\pi^2 \frac{D_a^2}{L^2} + 4(n-1)^2\pi^2 \frac{D_a^2}{L^2} \right|, \\ &= \frac{\pi^2 D_a}{L^2} \lim_{n \rightarrow \infty} | -n^2 + (n-1)^2 |, \\ &= \frac{\pi^2 D_a}{L^2} \lim_{n \rightarrow \infty} | -2n + 1 |. \end{aligned}$$

Pour enlever les valeurs absolues, nous devons regarder le signe de $-2n + 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Ce signe est négatif. Il faut donc inverser le signe de $-2n + 1$ lorsque nous supprimons les valeurs absolues. Cela nous donne,

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi^2 D_a}{L^2} \lim_{n \rightarrow \infty} 2n - 1, \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Nous avons donc que la fermeture, $\overline{(\lambda_n)_{n \geq 1}}$, est totalement déconnectée.

Finalement, la Définition 3.2 est vérifiée pour l'opérateur A_{11} . Nous pouvons donc conclure que A_{11} est un opérateur spectral de Riesz.

□

A présent, il nous reste à montrer que l'opérateur A_{11} génère un semi-groupe. Pour ce faire, nous allons utiliser le théorème de génération de semi-groupe par des opérateurs de Riesz dans [4, Chapitre 2, Section 3, Théorème 2.3.5].

Théorème 3.1. Théorème de génération de semi-groupe par des opérateurs de Riesz

Supposons que A est un opérateur spectral de Riesz, avec des valeurs propres simples $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ et des vecteurs propres $(\phi_n)_{n \geq 1}$ correspondants.

Soit $(\psi_n)_{n \geq 1}$ des vecteurs propres de A^* tels que $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{nm}$.

Alors,

A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu, si et seulement si, $\sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda_n) < \infty$

et $S(t)$ est donné par $S(t)(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \cdot, \psi_n \rangle \phi_n$.

En outre, la constante de croissance ω_0 du semi-groupe est donnée par

$$\omega_0 = \inf_{t > 0} \left(\frac{1}{t} \ln \|S(t)\| \right) = \sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda_n).$$

Nous découlerons de ce théorème, le théorème de génération d'un semi-groupe par l'opérateur A_{11} . Ce nouveau théorème sera fondamental afin d'établir, par la suite, un théorème de génération d'un semi-groupe positif par l'opérateur A .

Théorème 3.2. Génération d'un semi-groupe par l'opérateur A_{11}

L'opérateur A_{11} génère un semi-groupe $T_{11}(t)$ donné, pour tout état initial $x_{10} \in L^2(0, L)$, $\forall t \geq 0$ et pour tout $z \in [0, L]$ par

$$(T_{11}(t)x_{10})(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle x_{10}, \psi_n \rangle_2 \phi_n(z),$$

où λ_n , $n \geq 1$ sont des valeurs propres (réelles) de A_{11} , ϕ_n , $n \geq 1$ sont des vecteurs propres de A_{11} et ψ_n sont des vecteurs propres de l'adjoint de A_{11} , A_{11}^* .

De plus, il existe une constante $M_1 > 0$ telle que

$$\|T_{11}(t)\| \leq M_1 \exp\left(-\left(\frac{v^2}{4D_a} + k_0\right)t\right), \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Une grande partie de cette démonstration se base sur le résultat du Théorème 3.1 appliqué à l'opérateur A_{11} .

Par le Lemme 3.1, nous avons que l'opérateur A_{11} est un opérateur spectral de Riesz.

En outre, nous avons établi dans la démonstration de ce lemme que les valeurs propres de A_{11} sont simples.

Une autre hypothèse à vérifier concerne les vecteurs propres de l'opérateur adjoint de A_{11} , A_{11}^* . Le calcul de l'opérateur adjoint est disponible dans l'annexe D. Nous obtenons que A_{11}^* est donné par :

$$\begin{aligned} A_{11}^* : D(A_{11}^*) &\longrightarrow L^2(0, L), \\ y_1 &\longmapsto A_{11}^* y_1 = Da \frac{d^2 y_1}{dz^2} + v \frac{dy_1}{dz} - k_0 y_1, \end{aligned}$$

où le domaine de A_{11}^* est

$$\begin{aligned} D(A_{11}^*) = \left\{ y_1 \in L^2(0, L) : y_1, \frac{dy_1}{dz} \in L^2(0, L) \text{ et sont absolument continus,} \right. \\ \left. \frac{d^2 y_1}{dz^2} \in L^2(0, L), \frac{dy_1}{dz}(0) = 0, Da \frac{dy_1}{dz}(L) + v y_1(L) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Les vecteurs propres de cet opérateur ont été calculés dans l'annexe E et sont donnés par

$$\psi_n(z) = M_n \phi_n(L - z).$$

De façon intuitive, nous pouvons confirmer ce résultat suite à un raisonnement simple. L'opérateur A_{11}^* diffère de l'opérateur A_{11} uniquement par le signe du second terme c'est-à-dire, celui de la dérivée première. Or, la dérivée seconde de $\phi_n(L - z)$ donne bien le même signe que celui de la dérivée seconde de $\phi_n(z)$, tandis que la dérivée première sera de signe opposé à celui de celle de $\phi_n(z)$.

A présent, montrons que les vecteurs propres ϕ_n de A_{11} et ψ_m de A_{11}^* sont orthonormés. Pour

ce faire, nous allons utiliser un développement similaire à celui de [4, Chapitre 2, Section 3, Lemme 2.3.2]. Considérons

$$\begin{aligned}\lambda_n \langle \phi_n, \psi_m \rangle &= \langle \lambda_n \phi_n, \psi_m \rangle, \\ &= \langle A \phi_n, \psi_m \rangle.\end{aligned}$$

En utilisant la définition de l'opérateur adjoint, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}&= \langle \phi_n, A^* \psi_m \rangle, \\ &= \langle \phi_n, \lambda_m \psi_m \rangle, \\ &= \lambda_m \langle \phi_n, \psi_m \rangle.\end{aligned}$$

Dans le cas où $n \neq m$, nous avons que $\lambda_n \neq \lambda_m$ car les valeurs propres sont simples. Nous avons alors que $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = 0$. Par une mise à l'échelle adéquate de ψ_m , nous obtenons que

$$\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{nm}.$$

Cela signifie que les vecteurs propres associés à A_{11} et A_{11}^* sont orthonormés.

Concernant le supremum des parties réelles des valeurs propres de l'opérateur A_{11} , nous pouvons établir qu'il est majoré. En effet, les valeurs propres de l'opérateur A_{11} sont réelles. Il en découle alors que $\sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda_n) = \sup_{n \geq 1} \lambda_n$. Or, comme cela a été prouvé dans l'annexe C,

$$\lambda_n < -\left(\frac{v^2}{4D_a} + k_0\right) \quad \forall n \geq 1.$$

Ce qui implique que $\sup_{n \geq 1} \lambda_n \leq -\left(\frac{v^2}{4D_a} + k_0\right) < 0 < \infty$.

Nous pouvons à présent appliquer le Théorème 3.1 et conclure que le semi-groupe généré $T_{11}(t)$ par l'opérateur A_{11} est donné par

$$T_{11}(t)(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \cdot, \psi_n \rangle \phi_n.$$

Finalement, démontrons que la norme du semi-groupe $T_{11}(t)$ est bornée par

$$M_1 \exp\left(-\left(\frac{v^2}{4D_a} + k_0\right)t\right) \quad \forall t \geq 0.$$

Nous pouvons de nouveau appliquer le Théorème 3.1. Ainsi, la constante de croissance ω_0 est le supremum de la partie réelle des λ_n , $n \geq 1$. Par le raisonnement exposé précédemment, nous obtenons donc que $\omega_0 \leq -\left(\frac{v^2}{4D_a} + k_0\right)$. En outre, en utilisant une propriété sur les semi-groupes développée dans [4, Chapitre 2, Section 1, Théorème 2.1.6], nous savons que cette constante de croissance vérifie

$$\forall \omega > \omega_0, \exists M_\omega > 1 \text{ tel que } \forall t \geq 0, \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}. \quad (3.10)$$

Il découle de ces deux observations que $\|T_{11}(t)\| \leq M_1 \exp\left(-\left(\frac{v^2}{4D_a} + k_0\right)t\right)$.

□

Intéressons-nous à l'opérateur A_{22} .

Notre objectif dans cette partie est de démontrer que l'opérateur A_{22} génère un semi-groupe. Cela nous sera utile pour prouver par la suite que l'opérateur A est le générateur d'un semi-groupe. Pour déterminer ce résultat nous allons, tout comme dans le cas de l'opérateur A_{11} , appliquer le Théorème 3.1.

Théorème 3.3. Génération d'un semi-groupe par l'opérateur A_{22}

Soit $\lambda_n, n \geq 1, \phi_n, n \geq 1$ et $\psi_n, n \geq 1$ comme défini dans le Théorème 3.2

Alors, l'opérateur A_{22} génère un semi-groupe $T_{22}(t)$ donné, pour tout état initial $x_{20} \in L^2(0, L), \forall t \geq 0$ et pour tout $z \in [0, L]$ par

$$(T_{22}(t)x_{20})(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(\lambda_n + k_0)t} \langle x_{20}, \psi_n \rangle_2 \phi_n(z).$$

De plus, il existe une constante $M_2 > 0$ telle que

$$\|T_{22}(t)\| \leq M_2 \exp\left(-\left(\frac{v^2}{4D_a}\right)t\right), \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Comme cela a été évoqué, nous allons utiliser dans cette preuve le Théorème 3.1 et le fait que $A_{22} = A_{11} + k_0 I$. L'application du Théorème 3.1 nécessite la vérification de plusieurs hypothèses.

Tout d'abord, nous avons que l'opérateur A_{22} est un opérateur de Riesz. Afin de prouver cela, nous allons utiliser la Définition 3.2 d'opérateur de Riesz. Nous savons que l'opérateur A_{22} est un opérateur linéaire car c'est un opérateur de dérivation. Concernant la fermeture, il a été démontré dans l'annexe F que si B est un opérateur fermé, alors $B + \alpha I$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est un opérateur fermé. De ce fait, comme il a été démontré que A_{11} est un opérateur fermé dans le Lemme 3.1, nous en déduisons que $A_{22} = A_{11} + k_0 I$ avec $k_0 \in \mathbb{R}$ est fermé. La suite des caractéristiques des opérateurs de Riesz que nous trouvons dans la définition concerne les valeurs propres et vecteurs propres de A_{22} . Nous allons donc calculer ces derniers en mettant en évidence leurs liens avec ceux de l'opérateur A_{11} . Les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur A_{22} sont respectivement les λ' et les x' vérifiant

$$\begin{aligned} A_{22}x' = \lambda'x' &\Leftrightarrow (A_{11} + k_0 I)x' = \lambda'x', \\ &\Leftrightarrow A_{11}x' + k_0x' = \lambda'x', \\ &\Leftrightarrow A_{11}x' = (\lambda' - k_0)x'. \end{aligned}$$

Nous savons que λ est valeur propre de A_{11} d'où,

$$\Leftrightarrow \lambda x' = (\lambda' - k_0)x'.$$

Cela implique que $\lambda = \lambda' - k_0$ ou encore que $\lambda' = \lambda + k_0$. En outre, les vecteurs propres x' de A_{22} sont égaux aux vecteurs propres x de A_{11} . Les valeurs propres de A_{22} sont simples.

Effectivement, nous avons que $\lambda'_n = \lambda_n + k_0$. Or nous avons mis en évidence, dans le Lemme 3.1, que les valeurs propres λ_n sont simples. Concernant les vecteurs propres de A_{22} , ils sont identiques à ceux de A_{11} et forment donc une base de Riesz par les mêmes arguments que ceux utilisés dans le Lemme 3.1. Tentons de prouver que la fermeture des vecteurs propres est totalement déconnectée. Pour ce faire, il suffit de montrer que

$$\begin{cases} \lambda'_n \rightarrow -\infty \text{ quand } n \rightarrow \infty, \\ |\lambda'_{n+1} - \lambda'_n| \rightarrow \infty \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Nous allons utiliser le fait que $\lambda_n \rightarrow -\infty$ et que $|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \rightarrow \infty$, comme cela a été démontré dans le Lemme 3.1. Ainsi, nous avons

$$\begin{cases} \lambda'_n = \lambda_n + k_0 \rightarrow -\infty \text{ quand } n \rightarrow \infty, \\ |\lambda'_{n+1} - \lambda'_n| = |\lambda_{n+1} + k_0 - \lambda_n - k_0| \rightarrow \infty \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{cases}$$

La fermeture des valeurs propres de A_{22} est donc totalement déconnectée. Grâce aux différents éléments que nous venons de montrer et par la Définition 3.2, nous pouvons déduire que A_{22} est un opérateur spectral de Riesz.

En outre, les vecteurs propres de l'opérateur adjoint de A_{22} sont identiques à ceux de l'opérateur adjoint de A_{11} . De ce fait, nous avons que les vecteurs propres de A_{22} et ceux de A_{22}^* sont orthonormés par un raisonnement analogue à celui réalisé dans le Théorème 3.2. Concernant le supremum des parties réelles des valeurs propres de A_{22} , nous pouvons montrer qu'il est fini. En effet,

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda'_n) &= \sup_{n \geq 1} (\lambda_n + k_0), \\ &= \sup_{n \geq 1} \lambda_n + k_0. \end{aligned}$$

Par un résultat mis en évidence dans l'annexe E, nous déduisons

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda'_n) &\leq -\left(\frac{v^2}{4D_a} + k_0\right) + k_0, \\ &= \frac{-v^2}{4D_a}, \\ &< 0, \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Par le Théorème 3.1, nous pouvons conclure au sujet de la génération d'un semi-groupe de la forme

$$\begin{aligned} T_{22}(t)(\cdot) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{(\lambda'_n)t} \langle \cdot, \psi'_n \rangle \phi'_n, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{(\lambda_n + k_0)t} \langle \cdot, \psi_n \rangle \phi_n. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant une dernière fois le Théorème 3.1, nous obtenons que la constante

de croissance $\omega_0 = \sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda'_n)$. Il suit donc du raisonnement précédent que $\omega_0 \leq \frac{-v^2}{4D_a}$. Grâce au résultat (3.10), nous pouvons conclure qu'il existe une constante $M_2 > 0$ telle que

$$\|T_{22}(t)\| \leq M_2 \exp\left(-\left(\frac{v^2}{4D_a}\right)t\right), \forall t \geq 0.$$

□

Intéressons-nous à l'opérateur A .

Nous avons à présent la plupart des éléments à notre disposition pour prouver que l'opérateur A est bien le générateur d'un semi-groupe $T(t)$. Cependant, la preuve se base sur le résultat qui suit, provenant de [4, Chapitre 3, Section 2, Lemme 3.2.2].

Théorème 3.4. Soit $S_1(t)$ et $S_2(t)$ des semi-groupes fortement continus sur les espaces de Hilbert Z_1 et Z_2 , respectivement et avec A_1 et A_2 leurs générateurs infinitésimaux. Supposons que $\|S_i(t)\| \leq M_i e^{\omega_i t}$, $i = 1, 2$ et que $D \in \mathcal{L}(Z_1, Z_2)$. Alors, l'opérateur

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ D & A_2 \end{pmatrix}$$

avec $D(A) = D(A_1) \oplus D(A_2)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $S(t)$ sur $Z = Z_1 \oplus Z_2$ donné par

$$S(t) = \begin{pmatrix} S_1(t) & 0 \\ S(t) & S_2(t) \end{pmatrix}, \text{ où } S(t)x = \int_0^t S_2(t-s)DS_1(s)x ds.$$

De plus, il existe une constante positive M telle que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, où la quantité ω est définie par $\omega = \max(\omega_1, \omega_2)$ si $\omega_1 \neq \omega_2$ et $\omega > \omega_1$ si $\omega_1 = \omega_2$.

En appliquant ce théorème dans le cas du réacteur à dispersion axiale, nous obtenons que l'opérateur

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ bk_0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

est le générateur du semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ donné par

$$T(t) = \begin{pmatrix} T_{11}(t) & 0 \\ T_{21}(t) & T_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

où $T_{11}(t)$ et $T_{22}(t)$ sont les semi-groupes fortement continus générés respectivement par A_{11} et A_{22} et où $T_{21}(t)$ est donné par

$$T_{21}(t)x_1 = bk_0 \int_0^t T_{22}(t-s)T_{11}(s)x_1 ds. \quad (3.12)$$

3.2 Positivité du semi-groupe

Maintenant que nous avons démontré qu'il y avait génération d'un semi-groupe par l'opérateur A , nous allons prouver dans ce passage la positivité du semi-groupe $T(t)$ généré. Pour ce faire, nous utiliserons la caractérisation de positivité d'un semi-groupe. Celle-ci, ainsi que la majeure partie de la réflexion qui suit, est tirée du document [11].

Proposition 3.1. Caractérisation de semi-groupe positif

Soit un semi-groupe fortement continu $S(t)$ d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach réel ordonné, généré par un opérateur A , tel que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \forall t \geq 0$, avec $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$.

Alors, $S(t)$ est positif, si et seulement si, l'opérateur résolvant, $R_\alpha(A) = (\alpha I - A)^{-1}$, est un opérateur linéaire, positif $\forall \alpha > \omega$.

Suite à cette définition, nous observons qu'il est nécessaire de connaître le signe de l'opérateur résolvant afin de conclure quant à la positivité ou non du semi-groupe. Dans ce but, nous utiliserons une propriété des opérateurs de Sturm-Liouville, définie dans le livre [4, Chapitre 2, Section 6, Exercice 2.10], qui permet de connaître l'expression de l'opérateur résolvant.

Propriété 3.3. Inverse d'un opérateur de Sturm-Liouville

Soit A un opérateur de Sturm-Liouville.

Si 0 n'est pas dans le spectre de A , alors

$$(A^{-1}f)(z) = \int_0^L g(z, y)f(y)\rho(y)dy,$$

avec

$$W(0)p(0)g(z, y) = \begin{cases} -s_1(z)s_2(y), & \text{si } 0 \leq z \leq y \leq L, \\ -s_2(z)s_1(y), & \text{si } 0 \leq y \leq z \leq L, \end{cases}$$

où s_1 et s_2 sont les solutions linéairement indépendantes des équations différentielles ordinaires

$$\begin{aligned} p \frac{d^2 s_1}{dz^2} + \frac{dp}{dz} \frac{ds_1}{dz} - qs_1 &= 0, & P_1 s_1 &= 0, & P_2 s_1 &\neq 0, \\ p \frac{d^2 s_2}{dz^2} + \frac{dp}{dz} \frac{ds_2}{dz} - qs_2 &= 0, & P_1 s_2 &\neq 0, & P_2 s_2 &= 0 \end{aligned}$$

et

$$W(0) = s_1(0) \frac{ds_2}{dz}(0) - s_2(0) \frac{ds_1}{dz}(0).$$

Ainsi, pour prouver la positivité de semi-groupe $T(t)$ nous définirons, dans un premier temps, un opérateur de Sturm-Liouville $\tilde{A} = (\alpha I - \tilde{A})$ qui permettra de démontrer la positivité du semi-groupe $\tilde{T}(t)$. La preuve de ce lemme est inspirée de celle développée dans le document [11]. Finalement, nous utiliserons ce lemme pour prouver la positivité du semi-groupe $T(t)$ qui nous intéresse dans le cas des réacteurs tubulaires à dispersion axiale.

Définissons donc l'opérateur

$$\check{A}f = (\alpha I - \tilde{A})f,$$

où

$$\tilde{A}f = \beta \frac{d^2 f}{dz^2} - \check{v} \frac{df}{dz}. \quad (3.13)$$

L'opérateur \tilde{A} ainsi défini appartient au domaine tel qu'il a été précisé à la Définition 3.1, avec

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \beta, v_1 = \check{v} \text{ et } v_2 = 0. \quad (3.14)$$

Supposons que

$$\beta > 0 \text{ et } \check{v} > 0, \quad (3.15)$$

car, lorsque nous utiliserons cet opérateur dans la preuve de positivité du semi-groupe $T(t)$, les quantités β et \check{v} seront respectivement égales aux quantités D_a et v strictement positives dans le modèle du réacteur avec dispersion. Nous allons également admettre que l'opérateur \tilde{A} est le générateur du semi-groupe fortement continu exponentiellement stable $\tilde{T}(t)$ sur $L^2(0, L)$. En effet, ce résultat a été développé dans le papier [19].

Tentons à présent de nous convaincre que le semi-groupe $\tilde{T}(t)$ est positif.

Lemme 3.2. *Le semi-groupe $\tilde{T}(t)$ est un semi-groupe positif.*

Démonstration. Afin de prouver que $\tilde{T}(t)$ est positif, nous devons montrer que $R_\alpha(\tilde{A})$ est un opérateur positif et linéaire $\forall \alpha > 0$.

Pour ce faire, nous utiliserons la Propriété 3.3. Il est donc nécessaire de vérifier les hypothèses de cette propriété.

Dans un premier temps, assurons-nous que \tilde{A} est un opérateur de Sturm-Liouville. Nous avons

$$\begin{aligned} \check{A}f &= (\alpha I - \tilde{A})f, \\ &= \alpha f - \beta \frac{d^2 f}{dz^2} + \check{v} \frac{df}{dz}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

En utilisant la Définition 3.1, nous devons donc montrer qu'il existe des fonctions continues sur $[0, L]$ à valeurs réelles, $p(z)$, $\frac{dp}{dz}(z)$, $q(z)$ et $\rho(z)$ avec $\rho(z) > 0$ et $p(z) > 0 \forall z$ telles que

$$\begin{aligned} \check{A}f &= \frac{1}{\rho(z)} \left(-\frac{d}{dz} \left(p(z) \frac{df}{dz} \right) + q(z)f \right), \\ &= \frac{1}{\rho(z)} \left(-\frac{dp}{dz} \frac{df}{dz} - p(z) \frac{d^2 f}{dz^2} + q(z)f \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Finalement, en égalant les équations (3.16) et (3.17), nous obtenons un système à résoudre,

$$\begin{cases} \frac{-p(z)}{\rho(z)} = -\beta, \\ \frac{-1}{\rho(z)} \frac{dp}{dz} = \check{v}, \\ \frac{q(z)}{\rho(z)} = \alpha. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(z) = \beta\rho(z), \\ \frac{-1}{\rho(z)} \beta \frac{d\rho}{dz} = \check{v}, \\ q(z) = \alpha\rho(z). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(z) = \beta\rho(z), \\ \frac{d\rho}{\rho} = \frac{-\check{v}}{\beta} dz, \\ q(z) = \alpha\rho(z). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(z) = \beta e^{\frac{-\check{v}}{\beta} z}, \\ \rho(z) = e^{\frac{-\check{v}}{\beta} z}, \\ q(z) = \alpha e^{\frac{-\check{v}}{\beta} z}. \end{cases} \quad (3.18a)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(z) = \beta e^{\frac{-\check{v}}{\beta} z}, \\ \rho(z) = e^{\frac{-\check{v}}{\beta} z}, \end{cases} \quad (3.18b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(z) = \beta e^{\frac{-\check{v}}{\beta} z}, \\ \rho(z) = e^{\frac{-\check{v}}{\beta} z}, \\ q(z) = \alpha e^{\frac{-\check{v}}{\beta} z}. \end{cases} \quad (3.18c)$$

Nous avons donc mis en évidence trois fonctions continues à valeurs réelles. De plus, la dérivée $\frac{dp}{dz} = -\check{v} e^{\frac{-\check{v}}{\beta} z}$ est également une fonction continue à valeurs réelles. Finalement, $\rho(z)$ et $p(z)$ sont toutes deux des fonctions strictement positives. Nous en déduisons finalement que l'opérateur \tilde{A} est un opérateur de Sturm-Liouville.

Afin d'utiliser la Propriété 3.3, il nous reste à démontrer que 0 n'est pas dans le spectre de \tilde{A} . Pour ce faire, supposons par l'absurde que 0 est dans le spectre de \tilde{A} , que l'on note $sp(\tilde{A})$. Cela revient à dire que 0 est une valeur propre de $\tilde{A}f$, ou encore que

$$\begin{aligned} \tilde{A}f &= 0, \\ \Leftrightarrow (\alpha I - \tilde{A})f &= 0, \\ \Leftrightarrow \alpha f &= \tilde{A}f, \\ \Leftrightarrow \alpha &\in sp(\tilde{A}). \end{aligned}$$

Cela contredit le fait que $\alpha \in R(\tilde{A})$. Nous en concluons que 0 n'est pas dans le spectre de \tilde{A} .

Nous avons mis en évidence le fait que les hypothèses de la Propriété 3.3 sont rassemblées dans le cas de l'opérateur \tilde{A} . Nous en déduisons donc que $\forall f \in L^2(0, L)$ et $z \in [0, L]$,

$$(\tilde{A}^{-1}f)(z) = [(\alpha I - \tilde{A})^{-1}f](z) = [R_\alpha(\tilde{A})f](z) = \int_0^L g(z, y)f(y)\rho(y)dy. \quad (3.19)$$

Afin de déterminer la positivité du semi-groupe $\tilde{T}(t)$ généré par l'opérateur \tilde{A} , il faut prouver que cet opérateur résolvant est linéaire. Ce qui est immédiat, étant donné que cet opérateur est un opérateur intégral.

Nous devons également démontrer que l'opérateur résolvant est positif $\forall \alpha > 0$. Nous étudions donc le signe des fonctions g , f et ρ . La positivité de la fonction ρ est immédiate par les hypothèses des opérateurs de Sturm-Liouville. Afin d'établir la positivité ou non de la fonction g , nous devons développer son expression en utilisant la définition de g détaillée dans la Propriété 3.3. Ce raisonnement étant uniquement calculatoire, il est proposé dans l'annexe G. L'expression (3.19) de l'opérateur résolvant de \tilde{A} , $R_\alpha(\tilde{A})f$ est donc positif $\forall 0 \leq f \in L^2(0, L)$ et $\forall \alpha > 0$.

Il en suit que le semi-groupe $\tilde{T}(t)$ est un semi-groupe positif.

□

Pour clôturer cette section, tentons d'utiliser ce lemme afin de prouver que le semi-groupe $T(t)$ est un semi-groupe positif.

Théorème 3.5. *Le semi-groupe $T(t)$ est un semi-groupe positif.*

Démonstration. Dans l'analyse sur la génération de semi-groupe, nous avons mis en évidence que l'opérateur triangulaire A génère un semi-groupe triangulaire également, donné par les relations (3.11) et (3.12),

$$T(t) = \begin{pmatrix} T_{11}(t) & 0 \\ T_{21}(t) & T_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Dans un premier temps, posons $\beta = D_a$ dans (3.13) et $\Delta_1 = \Delta_2 = D_a, v_1 = v$ et $v_2 = 0$ dans (3.4). Alors, $\tilde{A} = A_{22}$. De ce fait, le semi-groupe $\tilde{T}(t)$ est positif par le Lemme 3.2.

Pour montrer la positivité de $T_{11}(t)$, posons $\beta = D_a$ dans (3.13) et $\Delta_1 = \Delta_2 = D_a, v_1 = v$ et $v_2 = 0$ dans (3.4). Ainsi, $A_{11} = \tilde{A} - k_0 I$. Par [8, Chapitre 5, Section 4, Exercice 5.3], nous savons qu'un opérateur $B + \lambda I$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(e^{\lambda t} S(t))_{t \geq 0}$ quand B est le générateur d'un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$. Nous déduisons de ce résultat que $T_{11}(t) = e^{-k_0 t} \tilde{T}(t)$. Donc, en utilisant une nouvelle fois le Lemme 3.2, la positivité de $\tilde{T}(t)$ implique celle de $T_{11}(t)$.

Finalement, nous avons établi précédemment la relation (3.12), qui met en évidence que

$$T_{21}(t)x_1 = bk_0 \int_0^t T_{22}(t-s)T_{11}(s)x_1 ds.$$

La positivité des semi-groupes $T_{22}(t)$ et $T_{11}(t)$ qui vient d'être prouvée permet de conclure à la positivité de l'opérateur $T_{21}(t)$.

En conclusion, le semi-groupe $T(t)$ est un semi-groupe positif. □

Chapitre 4

Stabilité et observabilité des réacteurs tubulaires à effet piston

L'objectif de ce chapitre est de réaliser la suite de l'analyse dynamique des réacteurs tubulaires chimiques, en débutant par les réacteurs tubulaires à effet piston. Les questions de stabilité et d'observabilité seront donc abordées dans cette section.

Dans un premier temps, rappelons les notions théoriques de stabilité et d'observabilité qui nous seront utiles par la suite.

Définition 4.1. Stabilité exponentielle

Un C_0 -semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert Z est dit exponentiellement stable s'il existe des constantes $M > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$\forall x_0 \in Z \quad \|S(t)x_0\| \leq Me^{-\alpha t} \|x_0\| \quad \forall t \geq 0,$$

ou encore, s'il existe des constantes $M > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0.$$

Dans la suite, nous allons également étudier la propriété d'observabilité du modèle. Tout d'abord, donnons une première idée du concept d'état observable. Un état x_0 est observable lorsque, par observation des sorties (y) et des entrées (u) sur un intervalle de temps fini, on peut déterminer l'état initial du système (x_0).

Nous allons à présent caractériser l'observabilité d'un système en utilisant la notion de sous-espace inobservable comme cela a été réalisé dans l'article [19].

Considérons $y(\cdot)$ une fonction de sortie définie par

$$y(t) = Cx(t), t > 0,$$

où $C : H \rightarrow \mathbb{R}^p$ est un opérateur linéaire borné.

Définition 4.2. Sous-espace inobservable

Le sous-espace inobservable $NO(C, A)$ du système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

avec l'opérateur d'observation linéaire borné C est le sous-espace de tous les états initiaux x_0 pour lesquels la réponse à l'entrée nulle est nulle. En d'autres termes, c'est le sous-espace de tous les états initiaux produisant une sortie nulle c'est-à-dire,

$$y(t) = CS(t)x_0 = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

où $(S(t))_{t \geq 0}$ est le semi-groupe fortement continu généré par A .

Nous pouvons donc donner une définition de l'observabilité.

Définition 4.3. Observabilité

Un système $R = [A, B, C, D]$, ou encore la paire (C, A) , est dit observable, si et seulement si, le sous-espace inobservable est réduit à l'origine ($NO(C, A) = \{0\}$)

La caractérisation suivante découle de cette définition et de celle de sous-espace inobservable.

Proposition 4.1. Caractérisation de l'observabilité

Un système $R = [A, B, C, D]$, ou encore la paire (C, A) , est dit observable, si et seulement si,

$$\forall x_0 \in Z, \{CS(t)x_0 = 0 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow x_0 = 0\}.$$

Nous commencerons par nous intéresser au cas des réacteurs tubulaires à effet piston. Dans un premier temps, nous allons étudier la stabilité du semi-groupe $\bar{T}(t)$ associé à l'opérateur \bar{A} , défini en (2.1) par

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -v \frac{d}{dz} - k_0 & 0 \\ bk_0 & -v \frac{d}{dz} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, la question de l'observabilité sera étudiée.

4.1 Etude de la stabilité

Afin de prouver la stabilité du système, nous déterminerons préalablement le semi-groupe généré par le générateur infinitésimal \bar{A} . Dans ce but, nous utiliserons le Théorème 3.4 selon lequel un opérateur triangulaire est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe triangulaire sous certaines conditions particulières. Afin d'appliquer ce théorème à notre cas, il est nécessaire de connaître les expressions des semi-groupes $\bar{T}_{11}(t)$ et $\bar{T}_{22}(t)$ respectivement générés par les opérateurs \bar{A}_{11} et \bar{A}_{22} .

Intéressons-nous à l'opérateur \bar{A}_{11} .

En nous aidant de résultats provenant du livre [8, Chapitre 6, Section 3], nous savons que l'opérateur

$$(T(t)f)(\xi) = \begin{cases} f(t+\xi), & t+\xi \leq 1, \\ 0, & t+\xi > 1, \end{cases}$$

avec $\xi \in [0, 1]$, est le semi-groupe généré par l'opérateur \tilde{A} défini par

$$\tilde{A}f = \frac{df}{d\xi},$$

avec comme domaine

$$D(\tilde{A}) = \left\{ f \in L^2(0, 1) : f \text{ est absolument continue (a.c.)}, \frac{df}{d\xi} \in L^2(0, 1) \text{ et } f(1) = 0 \right\}.$$

En outre, nous savons que l'opérateur $k_0 I$ génère un semi-groupe de la forme $\exp(-k_0 t)$. L'opérateur \bar{A}_{11} , étant donné par $\bar{A}_{11}x_1 = -v \frac{dx_1}{dz} - k_0 x_1$, nous pouvons intuitivement supposer que le semi-groupe associé sera défini par

$$(\bar{T}_{11}(t)x_{10})(z) = \begin{cases} \exp(-k_0 t)x_{10}(z - vt) & \text{si } z \geq vt, \\ 0 & \text{si } z < vt, \end{cases} \quad (4.1)$$

pour tout état initial $x_{10} \in L^2(0, L)$, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $z \in [0, L]$. En effet, le terme $-v$ est source d'un décalage vers la gauche de nos trajectoires.

Confirmons cette intuition à l'aide d'une démonstration. Nous utiliserons un résultat provenant des notes de cours [20] faisant intervenir une propriété de la constante de croissance. Pour rappel, la constante de croissance a été définie dans le Théorème 3.1 par

$$\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{\ln \|S(t)\|}{t}. \quad (4.2)$$

Elle peut également s'exprimer à l'aide d'une limite,

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|S(t)\|}{t}. \quad (4.3)$$

De la définition de constante de croissance ω_0 , nous déduisons la proposition qui suit. Celle-ci a également été mise en évidence dans le Théorème 3.1, à l'équation 3.10. Ce résultat est donc un rappel.

Proposition 4.2. Constante de croissance

Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe et ω_0 sa constante de croissance. Alors,

$$\forall \omega > \omega_0 \exists M \geq 1 \text{ tel que } \forall t \geq t_0, \|S(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

Il est intéressant de remarquer que cette propriété n'est pas nécessairement vérifiée lorsque $\omega = \omega_0$.

Proposition 4.3.

Soit $(S(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(Z)$ un semi-groupe fortement continu sur un Hilbert Z ,

A , le générateur de $(S(t))_{t \geq 0}$,

ω_0 la constante de croissance de $(S(t))_{t \geq 0}$.

Alors, $\forall s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} s > \omega$, $s \in \rho(A)$ c'est-à-dire, $(sI - A)^{-1} \in \mathcal{L}(Z)$.

En outre, $\forall x \in Z$,

$$(sI - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-st}S(t)x dt. \quad (4.4)$$

Maintenant nous avons tous les éléments à notre disposition afin d'établir le résultat souhaité.

Proposition 4.4. *L'opérateur \bar{A}_{11} est le générateur d'un semi-groupe fortement continu $(\bar{T}_{11}(t))_{t \geq 0}$ sur $L^2(0, L)$ défini par la relation (4.1).*

Démonstration. Pour montrer que le semi-groupe $\bar{T}_{11}(t)$ est généré par l'opérateur \bar{A}_{11} , nous utiliserons le résultat (4.4) qui permet de lier un opérateur à son semi-groupe. Supposons donc que $\bar{T}_{11}(t)$ est un semi-groupe généré par un certain opérateur \tilde{A} et montrons que \tilde{A} est égal à l'opérateur \bar{A}_{11} du système.

Considérons $g \in L^2(0, L)$. Par l'égalité (4.4), nous avons que

$$\left[(sI - \tilde{A})^{-1} g \right] (\xi) = \left[\int_0^\infty e^{-st} \bar{T}_{11}(t) g dt \right] (\xi).$$

En utilisant une propriété d'intégrale de Bochner^[1], nous obtenons

$$= \int_0^\infty e^{-st} [\bar{T}_{11}(t) g] (\xi) dt.$$

Nous pouvons à présent utiliser l'identité intuitive du semi-groupe $\bar{T}_{11}(t)$ donnée par (4.1).

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{-k_0 t} g(\xi - vt) \chi_{[0, \frac{\xi}{v}]}(t) dt, \\ &= \int_0^{\frac{\xi}{v}} e^{-(s+k_0)t} g(\xi - vt) dt. \end{aligned}$$

Procédons au changement de variable consistant à poser $\xi - vt = \tau$. Nous pouvons alors réécrire l'égalité,

$$= \frac{1}{v} \int_0^\xi e^{\frac{-(s+k_0)(\xi-\tau)}{v}} g(\tau) d\tau.$$

D'où,

$$\left[(sI - \tilde{A})^{-1} g \right] (\xi) = \underbrace{\frac{1}{v} e^{-(\frac{s+k_0}{v})\xi} \int_0^\xi e^{\frac{(s+k_0)}{v}\tau} g(\tau) d\tau}_{\in \text{Im}(sI - A)^{-1}}.$$

A présent, considérons f appartenant à l'image de l'inverse de $(sI - \tilde{A})$ c'est-à-dire, $f \in \text{Im}(sI - \tilde{A})^{-1}$. De ce fait, il existe une fonction $h \in L^2(0, L)$ telle que $f = (sI - A)^{-1} h$. Nous pouvons alors écrire $f(\xi)$ comme

$$f(\xi) = \frac{1}{v} e^{-(\frac{s+k_0}{v})\xi} \int_0^\xi e^{\frac{(s+k_0)}{v}\tau} h(\tau) d\tau.$$

1. Selon la référence [15], l'intégrale de Bochner élargit la définition d'intégrale de Lebesgue aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

En isolant h dans cette équation, nous trouverons l'expression de \tilde{A} .

$$\Leftrightarrow v e^{\left(\frac{s+k_0}{v}\right)\xi} f(\xi) = \int_0^\xi e^{\left(\frac{s+k_0}{v}\right)\tau} h(\tau) d\tau.$$

En dérivant les deux membres de l'égalité par rapport à ξ , nous déduisons

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{s+k_0}{v} v e^{\left(\frac{s+k_0}{v}\right)\xi} f(\xi) + v e^{\left(\frac{s+k_0}{v}\right)\xi} \frac{df(\xi)}{d\xi} &= e^{\left(\frac{s+k_0}{v}\right)\xi} h(\xi), \\ \Leftrightarrow (s+k_0) f(\xi) + v \frac{df(\xi)}{d\xi} &= h(\xi). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Or, comme nous l'avons mis en évidence précédemment, $f = (sI - \tilde{A})^{-1} h$ autrement dit, $h = (sI - \tilde{A}) f = sf - \tilde{A}f$. Soit $\xi \in [0, L]$, nous avons

$$h(\xi) = sf(\xi) - \tilde{A}f(\xi). \quad (4.6)$$

Nous déduisons des équations (4.5) et (4.6) que l'opérateur \tilde{A} est défini par

$$\tilde{A}f = -v \frac{df}{d\xi} - k_0 f.$$

Cet opérateur a la même expression que l'opérateur \bar{A}_{11} . Il reste à déterminer son domaine afin de voir s'ils sont identiques.

Montrons que le domaine de \tilde{A} est identique à celui de \bar{A}_{11} . Autrement dit, prouvons que

$$\begin{aligned} D(\tilde{A}) &= D(\bar{A}_{11}), \\ &= \left\{ f \in L^2(0, L) \text{ telle que } f \text{ est absolument continue, } \frac{df}{d\xi} \in L^2(0, L) \text{ et } f(0) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Prenons une fonction $f \in \text{Im}(sI - \tilde{A})^{-1}$. En effet, considérer $f \in \text{Im}(sI - \tilde{A})^{-1}$ revient à travailler avec $f \in D(\tilde{A})$ car l'image de l'opérateur résolvant $(sI - \tilde{A})^{-1}$ correspond au domaine de l'opérateur $(sI - \tilde{A})$ qui lui-même est identique au domaine de l'opérateur \tilde{A} .

Ainsi, soit $f \in D(\tilde{A}) = \text{Im}(sI - \tilde{A})^{-1}$, nous savons par le raisonnement précédent qu'il existe une fonction $g \in L^2(0, L)$ telle que pour presque tout $\xi \in [0, L]$,

$$f(\xi) = \frac{1}{v} e^{-\left(\frac{s+k_0}{v}\right)\xi} \int_0^\xi e^{\left(\frac{s+k_0}{v}\right)\tau} g(\tau) d\tau.$$

Or, les fonctions

$$\frac{1}{v} e^{-\left(\frac{s+k_0}{v}\right)\xi} \text{ et } \int_0^\xi e^{\left(\frac{s+k_0}{v}\right)\tau} g(\tau) d\tau$$

sont des fonctions absolument continues appartenant à $L^2(0, L)$. Il en suit que f est une fonction absolument continue de $L^2(0, L)$.

En outre, si nous nous intéressons à la dérivée de $f(\xi)$ par rapport à ξ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{df(\xi)}{d\xi} &= \frac{-(s+k_0)}{v} \frac{1}{v} e^{-\left(\frac{s+k_0}{v}\right)\xi} \int_0^\xi e^{\left(\frac{s+k_0}{v}\right)\tau} g(\tau) d\tau + \frac{1}{v} e^{-\left(\frac{s+k_0}{v}\right)\xi} e^{\left(\frac{s+k_0}{v}\right)\xi} g(\xi), \\ &= \frac{-(s+k_0)}{v} f(\xi) + \frac{1}{v} g(\xi). \end{aligned}$$

Comme les fonctions f et g appartiennent toutes deux à $L^2(0, L)$, nous pouvons déduire que $\frac{df}{d\xi} \in L^2(0, L)$.

Finalement, étudions la fonction f évaluée en 0, $f(0) = \frac{1}{v} \cdot v \cdot 0 = 0$.

Nous pouvons donc conclure que le domaine de l'opérateur \tilde{A} est identique à celui de l'opérateur \bar{A}_{11} .

Ainsi, nous avons démontré que l'opérateur \tilde{A} , qui générerait le semi-groupe $\bar{T}_{11}(t)$, était égal à l'opérateur \bar{A}_{11} . Nous en concluons donc que l'opérateur \bar{A}_{11} génère le semi-groupe $(\bar{T}_{11}(t))_{t \geq 0}$, tel que nous l'avons défini en (4.1). □

Afin d'utiliser ultérieurement le Théorème 3.4, nous devons montrer que le semi-groupe $\bar{T}_{11}(t)$ est borné. En réalité, nous allons pouvoir établir un résultat encore plus fort.

Lemme 4.1. Stabilité exponentielle de \bar{T}_{11}

Le semi-groupe $(\bar{T}_{11}(t))_{t \geq 0}$ défini en (4.1) est exponentiellement stable. Il est tel que

$$\|\bar{T}_{11}(t)\| \leq e^{-k_0 t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.7)$$

Démonstration. Afin de montrer que $\bar{T}_{11}(t)$ est exponentiellement stable, prouvons, comme cela a été rappelé dans la Définition 4.1, qu'il existe des constantes $M > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$\|T(t)x_0\| \leq M e^{-\alpha t} \|x_0\| \quad \forall t \geq 0.$$

Dans notre cas, montrons que l'inclusion est valide avec $x_0 = x_{10}$, $M = 1$ et $\alpha = k_0$. Soit $t \geq 0$, en développant l'expression de la norme du semi-groupe $\bar{T}_{11}(t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\bar{T}_{11}(t)x_{10}\|^2 &= \int_0^L ([\bar{T}_{11}(t)x_{10}](z))^2 dz, \\ &= \int_{vt}^L (e^{-k_0 t} x_{10}(z - vt))^2 dz. \end{aligned}$$

A présent, procédons à un changement de variables en posant $\xi = z - vt$. Cela nous donne

$$= e^{-2k_0 t} \int_0^{L-vt} (x_{10}(\xi))^2 d\xi.$$

Etant donné que $L - vt \leq L$, nous déduisons l'inégalité qui suit,

$$\begin{aligned} \|\bar{T}_{11}(t)x_{10}\|^2 &\leq e^{-2k_0 t} \int_0^L (x_{10}(\xi))^2 d\xi, \\ &= e^{-2k_0 t} \|x_{10}\|^2. \end{aligned}$$

Nous déduisons alors que

$$\|\bar{T}_{11}(t) x_{10}\| \leq e^{-k_0 t} \|x_{10}\|, \forall t \geq 0$$

c'est-à-dire,

$$\|\bar{T}_{11}(t)\| \leq e^{-k_0 t}, \forall t \geq 0.$$

□

Intéressons-nous à l'opérateur \bar{A}_{22} .

Avant de pouvoir aborder la stabilité de l'opérateur \bar{A} , mettons en évidence des résultats préliminaires concernant l'opérateur \bar{A}_{22} comme nous l'avons réalisé pour l'opérateur \bar{A}_{11} .

Dans le raisonnement qui suit, nous utiliserons le fait que l'opérateur $\bar{A}_{22} = \bar{A}_{11} + k_0 I$. Afin de déterminer le semi-groupe généré par l'opérateur \bar{A}_{22} , nous nous servirons d'un résultat énoncé dans le livre [8, Chapitre 5, Section 4].

Proposition 4.5.

Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur un espace de Hilbert Z dont A est le générateur infinitésimal.

Alors, $\lambda I + A$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(e^{\lambda t} S(t))_{t \geq 0}$.

Nous déduisons directement de cette proposition que l'opérateur \bar{A}_{22} est le générateur d'un semi-groupe fortement continu $\bar{T}_{22}(t)$ défini, pour tout état initial $x_{20} \in L^2(0, L)$, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $z \in [0, L]$, par

$$(\bar{T}_{22}(t) x_{20})(z) = \begin{cases} x_{20}(z - vt) & \text{si } z \geq vt, \\ 0 & \text{si } z < vt. \end{cases}$$

Ce semi-groupe est un semi-groupe de contraction. En effet, grâce à la Proposition 4.5, nous savons que

$$\|\bar{T}_{22}(t)\| = \|e^{k_0 t} \bar{T}_{11}(t)\| \leq e^{k_0 t} e^{-k_0 t} = 1.$$

En outre, comme précisé dans le document [19], ce semi-groupe est exponentiellement stable c'est-à-dire, il existe des constantes $M_1 > 0$ et $k_1 > 0$ telles que

$$\|\bar{T}_{22}(t)\| \leq M_2 e^{-k_1 t}, \forall t \geq 0. \quad (4.8)$$

Intéressons-nous à l'opérateur \bar{A} .

Nous disposons de tous les éléments afin d'étudier la stabilité de l'opérateur \bar{A} . Dans un premier temps, nous mettrons en évidence le semi-groupe engendré par l'opérateur \bar{A} . Ensuite, nous conclurons au sujet de la stabilité du système et étudierons les trajectoires d'état.

Toutes les hypothèses du Théorème 3.4 étant vérifiées, nous pouvons l'appliquer à l'opérateur \bar{A} et en conclure le lemme suivant.

Lemme 4.2.

L'opérateur \bar{A} génère un semi-groupe fortement continu $(\bar{T}(t))_{t \geq 0}$ sur H de la forme

$$\bar{T}(t) = \begin{pmatrix} \bar{T}_{11}(t) & 0 \\ \bar{T}_{21}(t) & \bar{T}_{22}(t) \end{pmatrix},$$

où $\bar{T}_{21}(t)x_1 = \int_0^t \bar{T}_{22}(t-s)\bar{A}_{21}\bar{T}_{11}(s)x_1 ds$, $\bar{T}_{11}(t)$ est le semi-groupe généré par \bar{A}_{11} et $\bar{T}_{22}(t)$ est celui généré par \bar{A}_{22} .

Dans le cas du réacteur tubulaire à effet piston, le système est exponentiellement stable. Ce résultat, que l'on retrouve dans le papier [19], est repris et démontré dans ce qui suit.

Théorème 4.1. Stabilité exponentielle de \bar{T}

L'opérateur linéaire \bar{A} est le générateur d'un semi-groupe fortement continu $(\bar{T}(t))_{t \geq 0}$ exponentiellement stable sur H tel que, pour tout état initial $x_0 \in H$, la solution $x(., t) = \bar{T}(t)x_0, t \geq 0$, est donnée pour tout $z \in [0, L]$ par $x = (x_1, x_2)^T$, où

$$\text{si } z < vt, \quad x_1(z, t) = x_2(z, t) = 0,$$

$$\text{si } z \geq vt \quad x_1(z, t) = e^{-k_0 t} x_{10}(z - vt),$$

$$x_2(z, t) = b(1 - e^{-k_0 t})x_{10}(z - vt) + x_{20}(z - vt).$$

Démonstration. Lors de cette démonstration, deux résultats doivent être obtenus. Le premier concerne la stabilité du semi-groupe alors que le second aborde le développement des trajectoires d'état.

Concernant la stabilité du semi-groupe, celle-ci découle immédiatement du Théorème 3.4 et des relations (4.7) et (4.8) traduisant la stabilité des semi-groupes $\bar{T}_{11}(t)$ et $\bar{T}_{22}(t)$. Effectivement, le Théorème 3.4 indique qu'il existe une constante positive M telle que $\|\bar{T}(t)\| \leq M e^{\omega t}$ pour $t \geq 0$, avec $\omega = \max\{-k_0, -k_1\}$. La constante ω est donc négative. Il en suit alors que le semi-groupe $\bar{T}(t)$ est exponentiellement stable.

Nous devons à présent préciser les trajectoires d'état du système. Soit $z \in L^2(0, L)$ et $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T \in H$, ces solutions sont déterminées par

$$\begin{aligned} \bar{T}(t)x_0(z) &= \begin{pmatrix} (\bar{T}_{11}(t)x_{10})(z) \\ (\bar{T}_{21}(t)x_{10})(z) + (\bar{T}_{22}(t)x_{20})(z) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} x_1(z, t) \\ x_2(z, t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$x_1(z, t) = (\bar{T}_{11}(t)x_{10})(z) = \begin{cases} e^{-k_0 t} x_{10}(z - vt) & \text{si } z \geq vt, \\ 0 & \text{si } z < vt. \end{cases}$$

La trajectoire d'état $x_2(., t)$ requiert de plus amples calculs. Dans le cas où $z < vt$, $x_2(z, t)$ est nul. En effet,

$$\begin{aligned} x_2(z, t) &= (\bar{T}_{21}(t) x_{10})(z) + (\bar{T}_{22}(t) x_{20})(z), \\ &= \int_0^t \bar{T}_{22}(t-s) \bar{A}_{21} \bar{T}_{11}(s) x_1(z) ds + 0. \end{aligned}$$

Or, $\bar{T}_{11}(s) x_1(z) = 0$ lorsque $z < vt$. Nous en déduisons donc que $x_2(z, t)$ est nul quand z est inférieur à vt . Ainsi, quand $t \geq 0$ est suffisamment grand c'est-à-dire, quand $\frac{L}{v} > t$, $x_2(z, t)$ est nul.

A présent, considérons le cas où $z \geq vt$, nous obtenons

$$\begin{aligned} x_2(z, t) &= \int_0^t \bar{T}_{22}(t-s) \bar{A}_{21} \bar{T}_{11}(s) x_1(z) ds + x_{20}(z - vt), \\ &= \int_0^t \bar{T}_{22}(t-s) \bar{A}_{21} e^{-k_0 s} x_{10}(z - vs) ds + x_{20}(z - vt), \\ &= \int_0^t \bar{T}_{22}(t-s) b k_0 e^{-k_0 s} x_{10}(z - vs) ds + x_{20}(z - vt). \end{aligned}$$

L'opérateur \bar{T}_{22} étant linéaire, nous pouvons écrire de façon équivalente que

$$\begin{aligned} x_2(z, t) &= b k_0 \int_0^t e^{-k_0 s} \bar{T}_{22}(t-s) x_{10}(z - vs) ds + x_{20}(z - vt), \\ &= b k_0 \int_0^t e^{-k_0 s} x_{10}(z - vs - vt + vs) ds + x_{20}(z - vt), \\ &= b k_0 \left[\frac{-e^{-k_0 s}}{k_0} \right]_0^t x_{10}(z - vt) + x_{20}(z - vt), \\ &= b (1 - e^{-k_0 t}) x_{10}(z - vt) + x_{20}(z - vt). \end{aligned}$$

De ce fait,

$$x_2(z, t) = \begin{cases} b (1 - e^{-k_0 t}) x_{10}(z - vt) + x_{20}(z - vt) & \text{si } z \geq vt, \\ 0 & \text{si } z < vt. \end{cases}$$

□

Remarquons que la stabilité du système pouvait également se déduire de l'expression des trajectoires d'état. En effet, si $t > z/v$, nous savons que $x(z, t)$ est nul. Cela implique donc que $\bar{T}(t) x_0 = 0 \forall x_0 \in H$ tel que $t > L/v$. Or, nous pouvons conclure au sujet de la stabilité d'un système lorsque la constante de croissance, ω_0 , du semi-groupe est strictement négative. En observant la définition de la constante de croissance définie en (4.3) par

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t},$$

nous voyons que nous pouvons nous contenter d'observer de grandes valeurs de t . Nous aurions alors pu déduire que $\|\bar{T}(t) x_0\| = 0 \leq M e^{-\alpha t}$ pour $t > L/v$ et en déduire la stabilité.

En conclusion, nous avons démontré que le système est stable dans le cas du réacteur tubulaire à effet piston. Ainsi, lorsque nous introduisons une entrée x limitée dans le système, la sortie qui en découle sera également bornée.

4.2 Etude de l'observabilité

A présent, nous allons étudier l'observabilité du système car, comme cela a été souligné dans [9], il est parfois nécessaire de connaître l'état du système en se basant sur l'observation des sorties. En effet, afin de stabiliser des systèmes linéaires par exemple, nous pouvons recourir à un feedback d'état stabilisant de la forme $u = Kx$. Pour mettre en place un tel feedback, il est nécessaire de connaître tout l'état en disposant uniquement des données mesurables du système ($A, B, C, u(t)$ et $y(t)$). Cela ne sera possible que si le système est observable.

Lors de cette étude sur l'observabilité, nous allons considérer différents cas comme cela est suggéré dans l'article [19]. Pour débiter, définissons l'opérateur d'observation,

$$C : \begin{matrix} H \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ Cx := \begin{pmatrix} \langle c_1, x \rangle \\ \langle c_2, x \rangle \end{pmatrix} \end{matrix}, \text{ avec } c_1, c_2 \in H, \quad (4.9)$$

tel que

$$y(t) = (Cx)(t) = \int_0^L \Delta_w(L-z) \mathcal{C}x(z, t) dz, \quad (4.10)$$

où

- Δ_w représente une impulsion unitaire finie de largeur w c'est-à-dire, $\Delta_w(z) = w^{-1}$ pour $z \in [0, w[$ et $\Delta_w(z) = 0$ partout ailleurs.
- \mathcal{C} est soit l'opérateur matriciel identitaire 2×2 quand nous mesurons deux composantes, x_1 et x_2 , à la sortie du réacteur (c'est-à-dire en $z = L$), soit un vecteur ligne unitaire si seul un des deux composants est mesuré.

En d'autres termes, la fonction de sortie $y(\cdot)$ est définie en considérant un très petit intervalle $[L - w, L]$ à la sortie du réacteur.

4.2.1 Observabilité avec deux mesures

Considérons que deux composantes x_1 et x_2 sont mesurés à la sortie du réacteur. Cela signifie que l'opérateur \mathcal{C} est donné par

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons alors réécrire la fonction de sortie en développant l'équation (4.10),

$$\begin{aligned} y(t) &= (Cx)(t) = \int_0^L \Delta_w(L-z) \mathcal{C}x(z, t) dz, \\ &= \int_0^L \Delta_w(L-z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(z, t) \\ x_2(z, t) \end{pmatrix} dz, \\ &= \int_0^L \Delta_w(L-z) \begin{pmatrix} x_1(z, t) \\ x_2(z, t) \end{pmatrix} dz, \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^L \Delta_w(L-z) x_1(z, t) dz \\ \int_0^L \Delta_w(L-z) x_2(z, t) dz \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Nous obtenons alors deux produits scalaires sur $L^2(0, L)$. Cela peut s'écrire de façon équivalente par,

$$= \begin{pmatrix} \langle \Delta_w(L-z) x_1(z, t) \rangle_2 \\ \langle \Delta_w(L-z) x_2(z, t) \rangle_2 \end{pmatrix}.$$

Dès lors,

$$Cx = \begin{pmatrix} \langle \Delta_w(L-\cdot) x_1(\cdot) \rangle_2 \\ \langle \Delta_w(L-\cdot) x_2(\cdot) \rangle_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \langle a_1, x_1(\cdot) \rangle_2 \\ \langle a_2, x_2(\cdot) \rangle_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle c_1, x(\cdot) \rangle \\ \langle c_2, x(\cdot) \rangle \end{pmatrix},$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur H et $c_1 = (a_1, 0)^T$ et $c_2 = (0, a_2)^T \in H$.

Afin de conclure au sujet de l'observabilité du système, nous introduisons un lemme permettant de déduire qu'une fonction s'annule presque partout lorsqu'une certaine intégrale de cette fonction est nulle. Ce lemme provient du papier [19].

Lemme 4.3.

Si $f \in L^2(0, L)$ et si $\int_0^x f(z) dz = 0$ pour tout $x \in [0, L]$
alors, $f = 0 \in L^2(0, L)$ autrement dit, $f(z) = 0$ pour presque tout $z \in [0, L]$.

Maintenant, montrons que le système est observable lorsque deux composantes de l'état, les concentrations en réactifs et produits, sont mesurées à la sortie du réacteur dans le cas du réacteur tubulaire à effet piston.

Théorème 4.2. Observabilité à deux composantes mesurées

Le réacteur tubulaire à effet piston c'est-à-dire, (C, \bar{A}) , est observable si deux composantes, les concentrations du réactif et du produit, sont mesurées à la sortie du réacteur.

Démonstration. Supposons que les composantes x_1 et x_2 sont mesurées à la sortie du réacteur et essayons de montrer que le système est observable en utilisant la caractérisation d'observabilité développée dans la Propriété 4.1. Soit $x_0 \in H$ et soit $t \geq 0$, montrons que $C\bar{T}(t)x_0 = 0$ implique que x_0 est nul.

Dans un premier temps, développons le terme $C\bar{T}(t)x_0$,

$$\begin{aligned} C\bar{T}(t)x_0 &= Cx(t), \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^L \Delta_w(L-z)x_1(z,t)dz \\ \int_0^L \Delta_w(L-z)x_2(z,t)dz \end{pmatrix}, \quad (\text{par la relation (4.11)}). \end{aligned}$$

Par la définition de Δ_w , nous savons que l'intégrale s'annule pour tout $L-z \in [0, w]$ et donc, pour tout $z \in [L-w, L]$. Cela nous donne

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{w} \int_{L-w}^L x_1(z)dz \\ \frac{1}{w} \int_{L-w}^L x_2(z)dz \end{pmatrix}.$$

Grâce au Théorème 4.1, nous connaissons l'expression des trajectoires d'état. Cela nous permet d'obtenir la formulation équivalente suivante,

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{w} \int_{L-w}^L e^{-k_0 t} x_{10}(z-vt)dz \\ \frac{1}{w} \int_{L-w}^L b(1-e^{-k_0 t})x_{10}(z-vt) + x_{20}(z-vt)dz \end{pmatrix}, \quad (4.12) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{-k_0 t}}{w} \int_{L-w}^L x_{10}(z-vt)dz \\ \frac{b(1-e^{-k_0 t})}{w} \int_{L-w}^L x_{10}(z-vt)dz + \frac{1}{w} \int_{L-w}^L x_{20}(z-vt)dz \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En posant $\phi_i(t) = \frac{1}{w} \int_{L-w}^L x_i(z-vt)dz, i = 1, 2$, nous obtenons

$$= \begin{pmatrix} e^{-k_0 t} \phi_1(t) \\ b(1-e^{-k_0 t}) \phi_1(t) + \phi_2(t) \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Dans un second temps, intéressons-nous à l'équation $C\bar{T}(t)x_0 = 0$, pour tout $t \geq 0$. Cette équation s'annule, si et seulement si, $\phi_1(t) = \phi_2(t) = 0$. En d'autres termes, il y a annulation, si et seulement si,

$$\frac{1}{w} \int_{L-w}^L x_{i0}(z-vt)dz = 0,$$

pour tout $t \geq 0$ et $i = 1, 2$. Nous allons réécrire cette expression sous une forme équivalente utile par la suite. Ainsi, posons $u = z - vt$ ce qui nous donne,

$$\frac{1}{w} \int_{L-w}^L x_{i0}(z-vt)dz = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{w} \int_{L-w-vt}^{L-vt} x_{i0}(u)du = 0, \quad i = 1, 2 \quad \forall t \geq 0.$$

Or, les fonctions $x_i(\cdot)$ pour $i = 1, 2$ ont leur support sur $[0, L]$. Cela signifie qu'elles s'annulent lorsque z n'appartient pas à l'intervalle $[0, L]$. Dès lors, intéressons-nous aux valeurs de la variable $u = z - vt$ dans l'intervalle $[0, L - vt]$ c'est-à-dire, pour $t \in [0, L/v]$. Afin de poursuivre, posons $\alpha = L - vt$. Il en suit que $t = (L - \alpha)/v \in [0, L/v]$ et donc que $\alpha \in [0, L]$. De ce fait,

$$\frac{1}{w} \int_{L-w-vt}^{L-vt} x_{i0}(u) du = 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha-w}^{\alpha} x_{i0}(u) du = 0, \quad i = 1, 2 \quad \forall \alpha \in [0, L].$$

Remarquons que lorsque $\alpha < w$, la quantité $\alpha - w$ est négative. Comme les fonctions $x_1(\cdot)$ et $x_2(\cdot)$ ont leur support sur $[0, L]$, nous avons que x_{10} et x_{20} sont nulles sur l'intervalle $[\alpha - w, 0]$. C'est pourquoi,

$$\int_{\alpha-w}^{\alpha} x_{i0}(u) du = \int_0^{\alpha} x_{i0}(u) du, \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ et } \forall \alpha \in [0, w].$$

De ce fait, l'équation $C\bar{T}(t) x_0 = 0 \quad \forall t \geq 0$ est équivalente à

$$\int_{\alpha-w}^{\alpha} x_{i0}(u) du = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ et } \forall \alpha \in [w, L] \quad (4.14)$$

et

$$\int_0^{\alpha} x_{i0}(u) du = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ et } \forall \alpha \in [0, w]. \quad (4.15)$$

Il nous reste encore à montrer que cela implique que $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$ est nul. Afin d'obtenir ce résultat, remarquons que pour tout $x \in [w, L]$, il existe une constante $\alpha \in [0, w]$ et un entier n tel que $\alpha = x - nw$. Ainsi, pour $x \in [w, L]$ nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_0^x x_{i0}(u) du &= \int_{x-w}^x x_{i0}(u) du + \int_{x-2w}^{x-w} x_{i0}(u) du + \dots + \int_{x-nw}^{x-(n-1)w} x_{i0}(u) du + \int_0^{\alpha} x_{i0}(u) du, \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\int_{x-(i+1)w}^{x-iw} x_{i0}(u) du}_{=0 \text{ par (4.14)}} + \underbrace{\int_0^{\alpha} x_{i0}(u) du}_{=0 \text{ par (4.15)}}, \\ &= 0, \end{aligned}$$

avec $i = 1, 2$. En outre, par la relation (4.15), nous savons que $\int_0^x x_{i0}(u) du = 0$, pour tout $x \in [0, w]$ et pour $i = 1, 2$. Ainsi, pour tout $x \in [0, L]$, nous avons

$$\int_0^x x_{i0}(u) du = 0,$$

pour $i = 1, 2$.

Grâce au Lemme 4.3, l'égalité précédente entraîne que $x_{10} = x_{20} = 0 \in L^2(0, L)$, ou encore $x_0 = 0 \in H$.

Nous concluons donc que (C, \bar{A}) est observable lorsque deux composantes sont mesurées à la sortie du réacteur.

□

4.2.2 Observabilité avec une mesure

Lorsqu'une seule mesure est obtenue à la sortie du réacteur tubulaire à effet piston, deux cas doivent être envisagés. Celui où la composante x_1 est mesurée ainsi que le cas où seule la mesure de x_2 est à disposition à la sortie du réacteur.

Seule la composante x_1 est disponible :

Lorsque nous mesurons uniquement la composante x_1 à la sortie du réacteur, le système c'est-à-dire, (c_1, \bar{A}) , n'est pas observable. En effet, dans ce cas, $\mathcal{C} = (1, 0)^T$ dans l'équation (4.9) et $C\bar{T}(t)x_0$ est tel que sa première composante est identique à celle de (4.13) et sa seconde est nulle. Cela engendre que

$$C\bar{T}(t)x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^{-k_0 t} \phi_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\phi_1(t)$ défini comme précédemment c'est-à-dire, donné par $\frac{1}{w} \int_{L-w}^L x_1(z - vt) dz$.

Nous en déduisons alors par un raisonnement analogue au précédent que $x_{10} = 0 \in L^2(0, L)$. Toutefois, aucune condition n'est imposée sur x_{20} qui peut alors prendre n'importe quelles valeurs. Le système n'est donc pas observable lorsque seule x_1 est mesurée à la sortie.

D'un point de vue physique, regarder uniquement les réactifs afin de reconstruire l'état du système n'avait pas beaucoup de sens. Ce résultat ne pose donc pas de problème.

Seule la composante x_2 est disponible :

Il serait intéressant de connaître l'état du système rien qu'en mesurant les produits à la sortie du réacteur. Essayons donc de déterminer l'observabilité du système lorsque seule la composante x_2 est mesurée.

Dans ce cas, le vecteur $C\bar{T}(t)x_0$ qui va nous intéresser, contient une première composante nulle alors que sa seconde composante coïncide avec celle de (4.13). En observant cette deuxième composante, nous sommes incapables de conclure à l'observabilité ou non du système c'est-à-dire, de (c_2, \bar{A}) .

Néanmoins, nous pouvons démontrer que (c_2, \bar{A}) est observable sur son domaine physique, le cône positif de l'espace d'état H , noté H_+ et défini par

$$H_+ = \{x = (x_1, x_2)^T \in H : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ presque partout}\}.$$

Notons que H_+ représente le domaine physique du système car nous travaillons avec des concentrations qui sont, par définition, positives. Or, dans la première partie de ce mémoire, nous avons montré que le système est positif c'est-à-dire, pour tout état initial et entrée positifs, la trajectoire d'état reste positive en tout temps et la sortie est positive.

Nous utiliserons une généralisation du concept d'observabilité comme cela a été fait dans l'article [19].

Définition 4.4. G -observabilité

Considérons un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ généré par un opérateur A et un opérateur d'observation linéaire borné, $C : Z \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Soit $G \subset Z$ un sous-ensemble de Z étant $S(t)$ -invariant c'est-à-dire, $S(t)G \subset G \forall t \geq 0$, tel que $0 \in G$.

Alors, le système c'est-à-dire, (C, A) est dit G -observable, si et seulement si,

$$NO(C, A) \cap G = \{0\}$$

c'est-à-dire,

$$\forall x_0 \in G, \{CS(t)x_0 = 0 \forall t \geq 0, \text{ implique } x_0 = 0\}.$$

Ce nouveau concept nous permet de conclure le résultat ci-dessous.

Théorème 4.3. Observabilité où seule la composante produit est mesurée

Le réacteur tubulaire à effet piston c'est-à-dire, (c_2, \bar{A}) est H_+ -observable, lorsqu'on mesure la concentration en produit, x_2 , à la sortie du réacteur.

Démonstration. Montrons que (c_2, \bar{A}) est H_+ -observable. Pour cela, reprenons la Définition 4.4 et appliquons-là au réacteur tubulaire à effet piston.

Tout d'abord, par la définition de H_+ , il est immédiat que $H_+ \subset H$ avec $0 \in H_+$. En outre, H_+ est $\bar{T}(t)$ -invariant. En effet, en analysant la définition de $x(z, t)$ énoncée lors du Théorème 4.1, nous observons que

$$\forall x_0 \in H_+, \forall t \geq 0 \text{ et } \forall z \in L^2(0, L), x(z, t) \geq 0.$$

Ainsi, nous pouvons déduire que

$$\forall x_0 \in H_+, \bar{T}(t)x_0 = x(\cdot, t) \in H_+,$$

autrement dit, H_+ est $\bar{T}(t)$ -invariant.

De plus, par définition, $C = c_2$ est linéaire et bornée sur H .

Il reste donc à montrer que le sous-espace inobservable $NO(c_2, \bar{A}) \cap H_+$ est réduit à l'origine. De ce fait, considérons $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T \in H_+$ et essayons de prouver que $c_2 \bar{T}(t)x_0 = 0$ implique que $x_0 = 0 \forall t \geq 0$. Comme cela a été évoqué précédemment,

$$c_2 \bar{T}(t)x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ b(1 - e^{-k_0 t}) \frac{1}{w} \int_{L-w}^L x_{10}(z - vt) dz + \frac{1}{w} \int_{L-w}^L x_{20}(z - vt) dz \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons en déduire que

$$c_2 \bar{T}(t)x_0 = 0 \Leftrightarrow b(1 - e^{-k_0 t}) \frac{1}{w} \int_{L-w}^L x_{10}(z - vt) dz + \frac{1}{w} \int_{L-w}^L x_{20}(z - vt) dz = 0 \forall t \geq 0.$$

Lorsque $t > 0$, cela implique que

$$\int_{L-w}^L x_{10}(z - vt) dz = \int_{L-w}^L x_{10}(z - vt) dz = 0$$

car les quantités b et $(1 - e^{-k_0 t})$ sont strictement positives. Ainsi, par un raisonnement analogue à celui effectué dans la démonstration du Théorème 4.2, nous concluons que $\forall t \in]0, L/v]$, $x_1 = x_2 = 0 \in L^2(0, L)$. □

Un corollaire découle de ce résultat qui, sous des conditions appropriées, dévoile que deux trajectoires d'état produisant une sortie identique sont identiques.

Corollaire 4.1.

Considérons le système du réacteur tubulaire à effet piston avec l'opérateur d'observation c_2 .

Si pour toute condition initiale $x = (x_1, x_2)^T$, $x' = (x'_1, x'_2)^T \in H$ tel que $(x - x') \in H_+$ ou $(x' - x) \in H_+$, x et x' produisent la même sortie c'est-à-dire, $c_2 \bar{T}(t)(x - x') = 0$ pour tout $t \geq 0$ alors $x = x' \in H$.

Démonstration. Tentons de prouver que $c_2 \bar{T}(t)(x - x') = 0 \forall t \geq 0 \Rightarrow x = x' \in H$. Remarquons qu'annuler $c_2 \bar{T}(t)(x - x')$ revient à annuler

$$\frac{1}{w} \int_{L-w}^L x_2(z) - x'_2(z) dz$$

par définition de $c_2 \bar{T}(t)(x - x')$. En d'autres termes,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w} \int_{L-w}^L (b(1 - e^{-k_0 t}) x_{10}(z - vt) + x_{20}(z - vt) \\ & \quad - b(1 - e^{-k_0 t}) x'_{10}(z - vt) - x'_{20}(z - vt)) dz = 0, \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{w} b(1 - e^{-k_0 t}) \int_{L-w}^L x_{10}(z - vt) - x'_{10}(z - vt) dz \\ & \quad + \frac{1}{w} \int_{L-w}^L x_{20}(z - vt) - x'_{20}(z - vt) dz = 0. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $(x - x') \in H_+$ ainsi que les mêmes arguments employés dans la démonstration du Théorème 4.3, nous concluons que les expressions $x_{10} - x'_{10}$ et $x_{20} - x'_{20}$ sont nulles sur $L^2(0, L) \forall t > 0$. Cela signifie donc que $x_0 = x'_0$. Par définition de la trajectoire d'état développée dans le Théorème 4.1, nous déduisons que $x = x' \in H$. □

Ce dernier résultat est peu satisfaisant car l'hypothèse selon laquelle $(x - x') \in H_+$ ou $(x' - x) \in H_+$ implique qu'à aucun moment les deux trajectoires x et x' ne peuvent se croiser.

Chapitre 5

Stabilité et observabilité des réacteurs tubulaires à dispersion axiale

Nous allons à présent étudier les propriétés de stabilité et d'observabilité des réacteurs chimiques tubulaires lorsqu'un terme de dispersion axiale est ajouté au modèle.

5.1 Stabilité

Dans un premier temps, nous allons établir un résultat concernant la stabilité. Tout comme dans le cas des réacteurs tubulaires à effet piston, le système avec dispersion axiale est stable. Pour s'en convaincre, il suffit de constater que le Théorème 3.4 contient un résultat sur la norme d'un semi-groupe généré par un opérateur triangulaire. Ainsi, nous obtenons que

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t},$$

où $\omega = \max\{\omega_1, \omega_2\}$ si $\omega_1 \neq \omega_2$ et $\omega > \omega_1$ sinon, avec ω_i satisfaisant

$$\|T_{ii}(t)\| \leq M_i e^{\omega_i t}, \text{ pour } i = 1, 2.$$

Dans le cas du système avec dispersion, nous avons établi les expressions de ω_1 et ω_2 respectivement dans les Théorèmes 3.2 et 3.3. Celles-ci sont données par

$$\omega_1 = -\left(\frac{v^2}{4D_a} + k_0\right) \text{ et } \omega_2 = -\left(\frac{v^2}{4D_a}\right).$$

Ainsi, en appliquant le résultat du Théorème 3.4 rappelé précédemment et en utilisant la positivité stricte de la constante k_0 , nous obtenons que la norme du semi-groupe $(T(t))$ est bornée par

$$M e^{\omega t}, \text{ avec } \omega = \max\{\omega_1, \omega_2\} = -\left(\frac{v^2}{4D_a}\right).$$

Nous en déduisons alors que le semi-groupe $(T(t))$ est stable puisque $\omega < 0$.

5.2 Observabilité

Maintenant, nous allons réaliser l'étude de l'observabilité dans le cas du réacteur tubulaire avec dispersion axiale. Tout comme dans le cas simplifié du réacteur à effet piston, nous considérerons des mesures à la sortie du réacteur c'est-à-dire, en $z = L$.

L'opérateur d'observation C sera identique à celui défini en (4.9). Pour rappel,

$$C : \begin{matrix} H \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ Cx := \begin{pmatrix} \langle c_1, x \rangle \\ \langle c_2, x \rangle \end{pmatrix} \end{matrix}, \text{ avec } c_1, c_2 \in H,$$

tel que

$$y(t) = (Cx)(t) = \int_0^L \Delta_w(L-z) Cx(z, t) dz,$$

où

- Δ_w est tel que $\Delta_w(z) = w^{-1}$ pour $z \in [0, w[$ et $\Delta_w(z) = 0$ partout ailleurs.
- C est soit l'opérateur matriciel identitaire 2×2 quand nous mesurons deux composants, x_1 et x_2 , à la sortie du réacteur, soit un vecteur ligne unitaire si seul un des deux composants est mesuré.

Après avoir développé cette définition, nous avons alors établi que

$$Cx = \begin{pmatrix} \langle \Delta_w(L - \cdot) x_1(\cdot) \rangle_2 \\ \langle \Delta_w(L - \cdot) x_2(\cdot) \rangle_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle c_1, x(\cdot) \rangle \\ \langle c_2, x(\cdot) \rangle \end{pmatrix}.$$

La réflexion utilisée pour analyser la propriété d'observabilité du modèle, inspirée de l'article [19], diffère quelque peu de l'étude réalisée dans le cas du réacteur à effet piston.

Un résultat présent dans [4, Chapitre 4, Section 2, Théorème 4.2.3] nous permettra de conclure des résultats concernant l'observabilité du système.

Lemme 5.1. Observabilité pour opérateur de Riesz

Soit un système $R = [A, B, C, 0]$, où A est un opérateur spectral de Riesz, avec une base de vecteurs propres de Riesz $(v_n)_{n \geq 1}$ et soit un opérateur d'observation $C : H \rightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire borné, donné par $Cx = (\langle c_1, x \rangle, \dots, \langle c_p, x \rangle)^T$, où $c_i \in H$ pour $i = 1, \dots, p$.

Alors le système R c'est-à-dire, (C, A) , est observable, si et seulement si, pour tout $n \geq 1$,

$$\text{rang}(\langle c_1, v_n \rangle, \dots, \langle c_p, v_n \rangle) = 1.$$

Nous allons introduire un nouveau concept, valable pour les opérateurs de Riesz, qui découle de ce lemme. Cette notion est celle d'observabilité modale.

Définition 5.1. Observabilité modale

Soit A un opérateur spectral de Riesz avec les valeurs propres λ_n , $n \geq 1$ et avec la base de Riesz de vecteurs propres correspondants, $(v_n)_{n \geq 1}$. La paire (λ_n, v_n) est appelée le n ème mode de l'opérateur A . De plus, considérons $C : Z \rightarrow \mathbb{R}^p$ un opérateur d'observation linéaire et borné de la forme $Cx = (\langle c_1, x \rangle, \dots, \langle c_p, x \rangle)^T$, où $c_i \in Z$ pour $i = 1, \dots, p$.

Alors, le n ème mode de A est dit observable ou encore, C -observable, si et seulement si, le rang de $(Cv_n)^T$ vaut 1 c'est-à-dire,

$$\text{rang}(\langle c_1, v_n \rangle, \dots, \langle c_p, v_n \rangle) = 1.$$

Les résultats qui appuieront la réflexion concerne les opérateurs de Riesz. Nous allons donc démontrer que l'opérateur A du modèle avec dispersion axiale est un opérateur de Riesz. Cette preuve est une production personnelle qui renforce et développe les arguments énoncés dans le document [19]. Nous serons ensuite en mesure d'appliquer le lemme et la définition présentés précédemment dans le cas du système avec dispersion axiale.

Avant d'entamer le détail de la démonstration du lemme selon lequel A est un opérateur de Riesz, nous allons rappeler quelques éléments concernant les opérateurs semblables qui seront utiles par la suite.

Définition 5.2. Opérateurs semblables

Deux opérateurs B et C sur un espace de Hilbert Z sont dits semblables s'il existe un opérateur inversible dans S dans $\mathcal{L}(Z)$ tel que $C = SBS^{-1}$.

Nous pouvons établir un lien entre les valeurs propres et les vecteurs propres de deux opérateurs semblables. Ce lien est présenté dans la propriété ci-dessous.

Propriété 5.1. Deux opérateurs semblables B et C , liés par un opérateur inversible S , ont le même spectre et les vecteurs propres de C sont donnés par Sx , où x représente les vecteurs propres de B , s'il y a un spectre discret.

Démonstration. En effet, on sait que B et C sont deux opérateurs semblables, cela signifie que $C = SBS^{-1}$, ou de façon équivalente, $CS = SB$. Soit x le vecteur propre de B , ce qui signifie que $Bx = \lambda x$ avec λ la valeur propre de l'opérateur B . Nous avons dès lors que $CSx = SBx = \lambda Sx$ ou encore, $Cx' = \lambda x'$ avec $x' = Sx$ vecteur propre de C .

Nous pouvons donc conclure que les valeurs propres de B sont identiques à celles de C . Les deux opérateurs ont donc le même spectre. En outre, les vecteurs propres de C sont donnés par Sx . □

A présent, nous pouvons prouver que l'opérateur A est un opérateur de Riesz.

Lemme 5.2. A est un opérateur de Riesz

Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$, des valeurs propres réelles de A_{11} définies par l'expression (3.7),
 $(\phi_n)_{n \geq 1}$ la base de Riesz des vecteurs propres de A_{11} ,
 $(\psi_n)_{n \geq 1}$ la suite des vecteurs propres de A_{11}^* définis par $M_n \phi_n(L - z)$, tels que (ϕ_n) et (ψ_n) sont orthonormés.
 Alors, l'opérateur linéaire A est un opérateur spectral de Riesz, dont les valeurs propres $(\mu_n)_{n \geq 1}$ sont données par

$$\begin{aligned} \mu_{2n+1} &= \lambda_{n+1} && \text{pour } n \geq 0 \text{ et} \\ \mu_{2n} &= \lambda_n + k_0 && \text{pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

De plus, les vecteurs propres correspondants, $(\Phi_n)_{n \geq 1}$ sont définies par

$$\begin{aligned} \Phi_{2n+1} &= (\phi_{n+1}, -b\phi_{n+1})^T && \text{pour } n \geq 0 \text{ et} \\ \Phi_{2n} &= (0, \phi_n)^T && \text{pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

Démonstration.

(i) *Identification des valeurs propres :*

Dans un premier temps, établissons les valeurs propres de l'opérateur A . L'opérateur A , comme établi dans l'expression (3.2), est un opérateur triangulaire que l'on note

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Or, les valeurs propres d'un opérateur triangulaire sont celles de la diagonale. En l'occurrence dans ce cas-ci, les valeurs propres de l'opérateur A sont celles de l'opérateur A_{11} définies par λ_n pour $n \geq 1$ et celles de l'opérateur A_{22} qui sont égales à $\lambda_n + k_0$ pour $n \geq 1$. Sans perdre de généralité, nous pouvons alors poser que les composantes impaires des valeurs propres de A correspondent aux valeurs propres de A_{11} et que les composantes paires sont celles de A_{22} . En d'autres termes, nous choisissons les valeurs propres $(\mu_n)_{n \geq 1}$ de sorte que

$$\begin{aligned} \mu_{2n+1} &= \text{les valeurs propres de } A_{11} = \lambda_{n+1} && \text{pour } n \geq 0 \text{ et} \\ \mu_{2n} &= \text{les valeurs propres de } A_{22} = \lambda_n + k_0 && \text{pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

(ii) *Identification des vecteurs propres :*

Nous devons ensuite établir les vecteurs propres de l'opérateur A . Pour ce faire, nous allons considérer deux cas. Premièrement, nous étudierons les vecteurs propres associés aux composantes impaires des valeurs propres de A . Ensuite, nous analyserons le cas où l'indice n est pair.

Le vecteur propre associé à la valeur propre μ_{2n+1} est le vecteur x vérifiant

$$\begin{aligned} Ax &= \mu_{2n+1}x, \\ \Leftrightarrow (A - \mu_{2n+1}I)x &= 0. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que A est une matrice triangulaire, nous pouvons réécrire l'équation par

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} - \mu_{2n+1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous devons alors résoudre le système suivant,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A_{11} - \mu_{2n+1}I)x_1 = 0, \\ A_{21}x_1 + (A_{22} - \mu_{2n+1}I)x_2 = 0. \end{cases}$$

Précédemment, nous avons mis en évidence que $\mu_{2n+1} = \lambda_{n+1}$, valeur propre de A_{11} . Nous obtenons donc que

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \phi_{n+1} = \text{vecteur propre de } A_{11} \text{ associé à la valeur propre } \lambda_{n+1}, \\ A_{21}\phi_{n+1} + (A_{22} - \lambda_{n+1}I)x_2 = 0. \end{cases}$$

Par définition de A , nous avons que $A_{21} = bk_0$, d'où

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \phi_{n+1}, \\ (A_{22} - \lambda_{n+1}I) x_2 = -bk_0\phi_{n+1}. \end{cases}$$

Un artifice de calcul va nous permettre de trouver l'expression de x_2 . Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 = \phi_{n+1}, \\ (A_{22} - \lambda_{n+1}I) x_2 = -bk_0\phi_{n+1} - b\lambda_{n+1}\phi_{n+1} + b\lambda_{n+1}\phi_{n+1}, \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 = \phi_{n+1}, \\ (A_{22} - \lambda_{n+1}I) x_2 = -b(k_0 + \lambda_{n+1})\phi_{n+1} + b\lambda_{n+1}\phi_{n+1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme ϕ_{n+1} est le vecteur propre de A_{22} associé à la valeur propre $\lambda_{n+1} + k_0$, nous avons que $A_{22}\phi_{n+1} = (\lambda_{n+1} + k_0)\phi_{n+1}$. Ce qui nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 = \phi_{n+1}, \\ (A_{22} - \lambda_{n+1}I) x_2 = -bA_{22}\phi_{n+1} + b\lambda_{n+1}\phi_{n+1}, \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 = \phi_{n+1}, \\ (A_{22} - \lambda_{n+1}I) x_2 = -b(A_{22} - \lambda_{n+1}I)\phi_{n+1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure que x_1 est donné par ϕ_{n+1} et x_2 par $-b\phi_{n+1}$. Les composantes impaires des vecteurs propres de l'opérateur A sont celles associées aux composantes impaires des valeurs propres de l'opérateur A . Elles sont définies par

$$\Phi_{2n+1} = (x_1, x_2)^T = (\phi_{n+1}, -b\phi_{n+1})^T, \text{ pour } n \geq 0.$$

Concernant le cas d'indice pair, nous devons trouver les valeurs de x_1 et x_2 vérifiant le système

$$\begin{cases} (A_{11} - \mu_{2n}I) x_1 = 0, \\ A_{21}x_1 + (A_{22} - \mu_{2n}I) x_2 = 0. \end{cases}$$

En utilisant le fait que $\mu_{2n} = \lambda_n + k_0$, le système devient

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A_{11} - \lambda_n I - k_0 I) x_1 = 0, \\ A_{21}x_1 + (A_{22} - (\lambda_n + k_0) I) x_2 = 0. \end{cases}$$

La première équation n'est vérifiée que pour x_1 nul, il en suit que

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ (A_{22} - (\lambda_n + k_0) I) x_2 = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons conclure que $x_2 = \phi_n$ car ϕ_n est le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_n + k_0$ de A_{22} . Nous avons donc que les composantes paires des vecteurs propres de A sont définies par

$$\Phi_{2n} = (x_1, x_2)^T = (0, \phi_n)^T \text{ pour } n \geq 1.$$

(iii) *A opérateur de Riez :*

Nous devons encore montrer que l'opérateur A est un opérateur spectral de Riesz. Pour ce faire, nous allons procéder de façon similaire aux précédentes, nous allons donc utiliser la Définition 3.2 d'opérateur spectral de Riesz et prouver que chaque caractéristique de cette définition est vérifiée.

a) *Espace de Hilbert :*

L'espace de travail, H est un espace de Hilbert.

b) *Opérateur linéaire :*

En outre, la linéarité de l'opérateur est immédiate car

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ bk_o & A_{22} \end{pmatrix}$$

où A_{11} et A_{22} sont des opérateurs linéaires et où $bk_o I$ est linéaire.

c) *Fermeture de l'opérateur :*

De plus, l'opérateur A est fermé car les opérateurs A_{11} et A_{22} le sont. La preuve de ce résultat utilise la définition de fermeture de l'opérateur et est similaire aux démonstrations effectuées en annexe B et F, elle n'est donc pas détaillée dans ce travail.

d) *Valeurs propres simples*

Concernant les valeurs propres, elles sont simples. En effet, elles sont définies en se basant sur celles de l'opérateur A_{11} qui étaient simples. En outre, nous avons que

$$\mu_{2n} \neq \mu_{2n+1}.$$

En effet, reprenons l'égalité (3.7) qui définit ces valeurs propres,

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &\neq \lambda_n + k_0, \\ \Leftrightarrow -\frac{s_{n+1}^2 + v^2}{4D_a} - k_0 &\neq -\frac{s_n^2 + v^2}{4D_a}, \\ \Leftrightarrow -s_{n+1}^2 - 4D_a k_0 &\neq -s_n^2, \\ \Leftrightarrow s_{n+1}^2 + 4D_a k_0 &\neq s_n^2. \end{aligned}$$

Cela est toujours vérifié car nous savons que $0 < s_n < s_{n+1}$ par définition des solutions s_n . Comme les constantes D_a et k_0 sont des constantes positives, nous avons alors que $s_{n+1}^2 + 4D_a k_0 > s_n^2$. Les valeurs propres de l'opérateur A sont donc simples.

e) *Fermeture des valeurs propres totalement déconnectée :*

Nous pouvons également prouver que la fermeture de valeurs propres de l'opérateur A est totalement déconnectée. Comme nous l'avons mis en évidence dans le Lemme 3.1, il suffit de prouver que

$$\begin{cases} \mu_n \longrightarrow -\infty \text{ quand } n \longrightarrow \infty \text{ et} \\ |\mu_{n+1} - \mu_n| \longrightarrow \infty \text{ quand } n \longrightarrow \infty. \end{cases}$$

La première condition est respectée à la fois dans le cas pair et impair car les valeurs propres de A sont définies en fonction des valeurs propres de A_{11} qui convergent vers $-\infty$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. Développons un peu la seconde condition,

$$\begin{aligned} |\mu_{n+1} - \mu_n| &= |\mu_{2n+1} - \mu_{2n}|, \\ &= |\lambda_{n+1} - \lambda_n - k_0|, \quad \text{par définition des valeurs propres de } A. \\ &\geq \underbrace{|\underbrace{|\lambda_{n+1} - \lambda_n|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty} - k_0|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty}, \quad \text{par propriété des valeurs absolues.} \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $|\mu_{n+1} - \mu_n|$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

f) $(\Phi_n)_{n \geq 1}$ *base de Riesz :*

Pour pouvoir conclure que A est un opérateur spectral de Riesz, il est nécessaire que ses vecteurs propres $(\Phi_n)_{n \geq 1}$ forment une base de Riesz dans H c'est-à-dire, il faut qu'ils forment une base équivalente à toute base orthonormée de H . Nous allons tenter d'établir que les vecteurs propres de A forment une base de Riesz pour le produit scalaire pondéré sur H . Nous devons donc montrer, pour $\Phi_n = (\Phi_n^1, \Phi_n^2)^T$, que

$$\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle_\rho := \langle \Phi_n^1, \Phi_m^1 \rangle_\rho + \langle \Phi_n^2, \Phi_m^2 \rangle_\rho = \delta_{nm}.$$

Nous devons dès lors étudier trois cas. La première possibilité consiste à considérer le produit scalaire pondéré entre les vecteurs propres de A d'indices impairs. Nous avons alors,

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{2n+1}, \Phi_{2m+1} \rangle_\rho &= \langle \phi_{n+1}, \phi_{m+1} \rangle_\rho + \langle -b\phi_{n+1}, -b\phi_{m+1} \rangle_\rho, \\ &= \langle \phi_{n+1}, \phi_{m+1} \rangle_\rho + b^2 \langle \phi_{n+1}, \phi_{m+1} \rangle_\rho. \end{aligned}$$

Dans la démonstration du Lemme 3.1, nous avons établi que les vecteurs propres $(\phi_n)_{n \geq 1}$ forment une base orthonormée pour le produit scalaire pondéré. En appliquant ce résultat à l'équation précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{2n+1}, \Phi_{2m+1} \rangle_\rho &= \delta_{nm} + b^2 \delta_{nm}, \\ &= (1 + b^2) \delta_{nm}. \end{aligned}$$

En mettant à l'échelle les composantes impaires des vecteurs propres de A c'est-à-dire, les Φ_{2n+1} sont divisés par $\sqrt{1 + b^2}$, nous obtenons que le produit scalaire

pondéré est égal au delta de Kronecker. Le second cas s'intéresse au produit scalaire pondéré entre les vecteurs propres d'indices pairs,

$$\langle \Phi_{2n}, \Phi_{2m} \rangle_\rho = \langle 0, 0 \rangle_\rho + \langle \phi_n, \phi_m \rangle_\rho.$$

Or, les vecteurs propres $(\phi_n)_{n \geq 1}$ forment une base orthonormée pour le produit scalaire pondéré. D'où,

$$\langle \Phi_{2n}, \Phi_{2m} \rangle_\rho = 0 + \delta_{nm}.$$

Finalement, il nous reste à considérer le produit croisé entre les vecteurs propres d'indices pairs et impairs. Sans perdre de généralité, nous allons prendre la première composante du produit scalaire pondéré comme étant un vecteur propre d'indice pair et la seconde composante d'indice impair, sans oublier de considérer que les vecteurs propres d'indices impairs ont été normés. Dans un premier temps, tentons d'avoir une vision plus claire de l'allure des vecteurs propres de l'opérateur A en développant leur définition sur les premiers indices,

$$\begin{aligned} (\Phi_n)_{n \geq 1} &= \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \dots, \Phi_{2n-1}, \Phi_{2n}, \dots\}, \\ &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{b^2 + 1}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ -b\phi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{b^2 + 1}} \begin{pmatrix} \phi_2 \\ -b\phi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \dots, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{b^2 + 1}} \begin{pmatrix} \phi_n \\ -b\phi_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_n \end{pmatrix}, \dots \right\}. \end{aligned}$$

A présent, développons le produit scalaire entre les vecteurs propres d'indices respectivement pair et impair.

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{2n}, \Phi_{2m+1} \rangle_\rho &= \langle 0, \phi_{m+1} \rangle_\rho + \left\langle \frac{1}{\sqrt{b^2 + 1}} \phi_n, -\frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}} \phi_{m+1} \right\rangle_\rho, \\ &= 0 - \frac{b}{b^2 + 1} \langle \phi_n, \phi_{m+1} \rangle_\rho. \end{aligned}$$

Deux situations différentes ressortent alors.

Soit $n \neq m + 1$, alors $\phi_n \neq \phi_{m+1}$ et le produit scalaire pondéré est nul. Ce qui est cohérent car les vecteurs propres d'indices pairs sont distincts de ceux d'indices impairs.

Soit $n = m + 1$, nous sommes alors dans le cas où le produit scalaire pondéré s'effectue entre le vecteur propre d'indice impair et celui d'indice pair qui lui succède directement c'est-à-dire, entre les vecteurs propres de la forme Φ_{2n-1} et Φ_{2n} . Dans ce cas, les deux vecteurs propres sont distincts et leur produit scalaire pondéré vaut $\frac{-b}{b^2+1}$ car $\langle \phi_n, \phi_{m+1} \rangle_\rho = 1$ lorsque $n = m + 1$. Nous avons donc un problème et nous ne pouvons conclure à l'existence d'une base de Riesz pour les vecteurs propres de l'opérateur A dans l'espace H muni du produit scalaire pondéré. Nous allons donc montrer qu'il existe un opérateur semblable à l'opérateur A pour lequel les vecteurs propres forment une base de Riesz. Nous cherchons donc une matrice de transformation T de dimension 2×2 , inversible, scalaire, à coefficients constants telle que

l'opérateur \tilde{A} soit semblable à l'opérateur A et de façon à ce que les vecteurs propres Ψ_n de \tilde{A} forment une base de Riesz. Par la Définition 5.2, nous cherchons donc T telle que $\tilde{A} = TAT^{-1}$, dont les vecteurs propres forment une base orthonormée.

Posons

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix} \text{ tel que } T \text{ est inversible c'est-à-dire, tel que } t_1t_4 - t_2t_3 \neq 0.$$

Nous souhaitons que les vecteurs propres de \tilde{A} forment une base orthonormée dans H . Par la Propriété 5.1, nous savons que les vecteurs propres de \tilde{A} sont de la forme $T\Phi_n$. Ils vont donc se définir de deux façons distinctes selon que nous considérons les indices pairs et impairs. Nous avons alors que

$$\begin{aligned} \Psi_{2n-1} &= T\Phi_{2n-1} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} \begin{pmatrix} \phi_n \\ -b\phi_n \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} \begin{pmatrix} (t_1 - bt_2)\phi_n \\ (t_3 - bt_4)\phi_n \end{pmatrix}, \text{ où } n \geq 1. \\ \Psi_{2n} &= T\Phi_{2n} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2\phi_n \\ t_4\phi_n \end{pmatrix}, \text{ où } n \geq 1. \end{aligned}$$

Trois cas vont à nouveau devoir être considérés afin d'identifier des conditions sur les composantes de la matrice T qui permettront d'avoir une base orthonormée de vecteurs propres. Nous allons dans un premier temps nous intéresser au produit scalaire pondéré entre les vecteurs propres de l'opérateur \tilde{A} d'indices impairs. Nous obtenons que

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{2n-1}, \Psi_{2m-1} \rangle_\rho &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} (t_1 - bt_2) \phi_n, \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} (t_1 - bt_2) \phi_m \right\rangle_\rho \\ &\quad + \left\langle \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} (t_3 - bt_4) \phi_n, \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} (t_3 - bt_4) \phi_m \right\rangle_\rho, \\ &= \frac{(t_1 - bt_2)^2}{b^2 + 1} \langle \phi_n, \phi_m \rangle_\rho + \frac{(t_3 - bt_4)^2}{b^2 + 1} \langle \phi_n, \phi_m \rangle_\rho. \end{aligned}$$

Or, comme les vecteurs propres (ϕ_n) de A_{11} forment une base de Riesz, ils sont orthonormaux. Il en suit que

$$\langle \Psi_{2n-1}, \Psi_{2m-1} \rangle_\rho = \frac{(t_1 - bt_2)^2 + (t_3 - bt_4)^2}{b^2 + 1} \delta_{nm}.$$

Afin d'avoir une base orthonormée de vecteurs propres nous devons imposer que

$$(t_1 - bt_2)^2 + (t_3 - bt_4)^2 = b^2 + 1. \quad (5.1)$$

Dans un second temps, nous allons analyser le cas où le produit scalaire pondéré est appliqué sur des vecteurs propres $(\Psi_n)_{n \geq 1}$ d'indices pairs. Il découle alors les égalités suivantes,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{2n}, \Psi_{2m} \rangle_\rho &= \langle t_2\phi_n, t_2\phi_m \rangle_\rho + \langle t_4\phi_n, t_4\phi_m \rangle_\rho, \\ &= (t_2^2 + t_4^2) \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Une seconde condition s'impose, à savoir,

$$t_2^2 + t_4^2 = 1. \quad (5.2)$$

Finalement, considérons le produit scalaire pondéré entre un vecteur propre d'indice pair et un autre d'indice impair. Cela nous donne

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{2n}, \Psi_{2m-1} \rangle_\rho &= \langle t_2 \phi_n, \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} (t_1 - bt_2) \phi_m \rangle_\rho + \langle t_4 \phi_n, \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} (t_3 - bt_4) \phi_m \rangle_\rho, \\ &= \frac{t_2 (t_1 - bt_2)}{\sqrt{b^2+1}} \langle \phi_n, \phi_m \rangle_\rho + \frac{t_4 (t_3 - bt_4)}{\sqrt{b^2+1}} \langle \phi_n, \phi_m \rangle_\rho, \\ &= \left(\frac{t_2 (t_1 - bt_2)}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{t_4 (t_3 - bt_4)}{\sqrt{b^2+1}} \right) \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Dans le cas où n est différent de m , nous obtenons bien que $\langle \Psi_{2n}, \Psi_{2m-1} \rangle_\rho$ est nul. Cependant, dans le cas où n vaut m , nous avons que

$$\langle \Psi_{2n}, \Psi_{2m-1} \rangle_\rho = \langle \Psi_{2n}, \Psi_{2n-1} \rangle_\rho = \frac{t_2 (t_1 - bt_2)}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{t_4 (t_3 - bt_4)}{\sqrt{b^2+1}}.$$

Si nous imposons que

$$\frac{t_2 (t_1 - bt_2)}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{t_4 (t_3 - bt_4)}{\sqrt{b^2+1}} = 0, \quad (5.3)$$

nous trouverons alors que $\langle \Psi_{2n}, \Psi_{2m-1} \rangle_\rho$ est bien nul pour tout n et m supérieurs à 1. Les composantes de la matrice T que nous devons trouver doivent alors vérifier la condition d'inversibilité et les contraintes imposées par le système suivant,

$$\begin{cases} (t_1 - bt_2)^2 + (t_3 - bt_4)^2 = 1 + b^2 & \text{par la condition (5.1),} \\ t_2^2 + t_4^2 = 1 & \text{par la condition (5.2),} \\ t_2 (t_1 - bt_2) + t_4 (t_3 - bt_4) = 0 & \text{par la condition (5.3).} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 (t_2^2 + t_4^2) - 2b (t_1 t_2 + t_3 t_4) + t_1^2 + t_3^2 = 1 + b^2, \\ t_2^2 + t_4^2 = 1, \\ t_2 t_1 + t_3 t_4 - b (t_2^2 + t_4^2) = 0. \end{cases}$$

En injectant la deuxième équation dans la première et la troisième nous obtenons,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b (t_1 t_2 + t_3 t_4) + t_1^2 + t_3^2 = 1, \\ t_2^2 + t_4^2 = 1, \\ t_2 t_1 + t_3 t_4 = b. \end{cases}$$

A présent, injectons la troisième équation dans la première afin d'obtenir le système équivalent,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1^2 + t_3^2 = 1 + 2b^2, \\ t_2^2 + t_4^2 = 1, \\ t_2 t_1 + t_3 t_4 = b. \end{cases}$$

Nous avons un système de trois équations à quatre inconnues à résoudre. Une des solutions de ce système consiste à prendre

$$t_1 = \sqrt{1 + 2b^2}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{b^2}{1 + 2b^2}}, \quad t_3 = 0 \quad \text{et} \quad t_4 = \sqrt{\frac{b^2 + 1}{1 + 2b^2}}.$$

Dans ce cas, les trois conditions permettant d'avoir des vecteurs propres qui forment une base orthonormée sont respectées. En outre, la matrice

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + 2b^2} & \sqrt{\frac{b^2}{1 + 2b^2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{b^2 + 1}{1 + 2b^2}} \end{pmatrix}$$

est inversible car $t_1 t_4 - t_2 t_3 = \sqrt{b^2 + 1} \neq 0$.

Nous avons donc trouvé un opérateur $\tilde{A} = T A T^{-1}$ semblable à l'opérateur de départ, A , dont les vecteurs propres forment une base de Riesz dans le produit scalaire pondéré. Donc, modulo deux changements de coordonnées (un sur le produit scalaire et l'autre sur l'opérateur), nous avons une base de Riesz.

En conclusion, toutes les caractéristiques de la définition d'opérateur spectral de Riesz sont vérifiées dans le cas de l'opérateur A . Nous en déduisons que A est un opérateur de Riesz.

□

Remarque :

Par souci de concision, nous aurions pu directement donner la matrice T et montrer que celle-ci nous permet de conclure le théorème. Cependant, nous avons décidé de détailler la démarche de construction de cette matrice car celle-ci pourrait être applicable dans un autre cas.

5.2.1 Observabilité avec deux mesures

Considérons d'abord les mesures de deux composantes, x_1 et x_2 , à la sortie du réacteur et étudions l'observabilité du système dans ce cas.

Un résultat préliminaire, affiné par la suite, peut être obtenu.

Théorème 5.1. Observabilité avec deux mesures

Le réacteur à dispersion axiale c'est-à-dire, (C, A) , est observable quand deux composantes x_1 et x_2 sont mesurées à la sortie du réacteur, si et seulement si,

$$\int_{L-w}^L \phi_n(z) dz \neq 0 \text{ pour tout } n \geq 1$$

ou, de façon équivalente, si et seulement si,

$$\sin\left(\frac{s_n L}{2D_a}\right) - e^{\frac{-vw}{2D_a}} \sin\left(\frac{s_n(L-w)}{2D_a}\right) \neq 0 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Démonstration.

Ce résultat découle du Lemme 5.1. Dans le Lemme 5.2, nous avons inscrit les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres de l'opérateur A à l'aide de la notation Φ_n . Le Lemme 5.1 nécessite donc le calcul de $C\Phi_n$, pour tout $n \geq 1$. En utilisant la Définition 4.9 de l'opérateur d'observation et celle des Φ_n , présente dans le Lemme 5.2, nous déduisons que

$$C\Phi_{2n+1} = \frac{1}{w} (1, -b)^T \int_{L-w}^L \phi_{n+1}(z) dz \quad \forall n \geq 0,$$

$$C\Phi_{2n} = \frac{1}{w} (0, 1)^T \int_{L-w}^L \phi_n(z) dz \quad \forall n \geq 0.$$

Pour conclure au sujet de l'observabilité, il est nécessaire que le rang de $(C\Phi_n)^T$ soit égal à 1 $\forall n \geq 1$. Cela revient donc à imposer que

$$\int_{L-w}^L \phi_n(z) dz \neq 0 \quad \forall n \geq 1.$$

La première partie du théorème est alors démontrée.

L'expression des vecteurs propres ϕ_n détaillée dans l'annexe C est donnée par

$$\phi_n(z) = \kappa_n e^{\frac{v}{2D_a}z} \left[\cos\left(\frac{s_n}{2D_a}z\right) + \frac{v}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{2D_a}z\right) \right]. \quad (5.4)$$

Celle-ci va nous permettre de développer l'intégrale afin de conclure la deuxième partie du théorème. Soit $n \geq 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{L-w}^L \phi_n(z) dz &= \int_{L-w}^L \kappa_n e^{\frac{v}{2D_a}z} \left[\cos\left(\frac{s_n}{2D_a}z\right) + \frac{v}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{2D_a}z\right) \right] dz, \\ &= \int_{L-w}^L \kappa_n e^{\frac{v}{2D_a}z} \cos\left(\frac{s_n}{2D_a}z\right) dz + \int_{L-w}^L \kappa_n \frac{v}{s_n} e^{\frac{v}{2D_a}z} \sin\left(\frac{s_n}{2D_a}z\right) dz. \end{aligned}$$

En intégrant le premier terme par partie on obtient, après simplifications,

$$= \kappa_n \frac{2D_a}{s_n} e^{\frac{v}{2D_a}L} \left[\sin\left(\frac{s_n L}{2D_a}\right) - e^{\frac{-vw}{2D_a}} \sin\left(\frac{s_n(L-w)}{2D_a}\right) \right]. \quad (5.5)$$

La première partie de la démonstration nous indique que $\int_{L-w}^L \phi_n(z) dz \neq 0$. De façon analogue, il faut donc que chacun des termes du produit (5.5) soit non nul. Les trois premiers termes le sont. Finalement, nous avons l'observabilité si les conditions équivalentes suivantes sont respectées,

$$\int_{L-w}^L \phi_n(z) dz \neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{s_n L}{2D_a}\right) - e^{\frac{-wv}{2D_a}} \sin\left(\frac{s_n(L-w)}{2D_a}\right) \neq 0,$$

pour tout $n \geq 1$.

□

Nous ne connaissons l'expression des s_n que sur base de l'équation résolvante (3.8),

$$\tan\left(\frac{L}{2D_a}s\right) = \frac{2vs}{s^2 - v^2}.$$

Il est donc difficile de conclure si le système est observable ou non. Dans l'article [19], plusieurs pistes sont envisagées pour répondre à la question d'observabilité. Nous pouvons, par exemple, nous intéresser au comportement asymptotique des solutions s_n . Nous pouvons également trouver des approximations numériques des valeurs des solutions s_n afin de conclure. La méthode que nous allons considérer dans la suite de ce mémoire repose sur l'analyse des racines des fonctions propres ϕ_n . Effectivement, en observant l'expression des ϕ_n rappelée en (5.4), nous trouvons que chaque fonction propre ϕ_n est une fonction continue sur $[0, L]$. Nous pouvons donc appliquer le Théorème de la moyenne, valable pour toute fonction à valeurs réelles, définie et continue sur un intervalle $[a, b]$. Nous avons alors

$$\int_{L-w}^L \phi_n(z) dz = L - (L-w) \phi_n(z_n) = w \phi_n(z_n) \quad , \quad \text{pour un certain } z_n \in]L-w, L[.$$

Donc, étudier dans quelles conditions nous avons $\int_{L-w}^L \phi_n(z) dz \neq 0$, revient à s'intéresser aux racines des fonctions propres ϕ_n . Le résultat suivant va nous aider dans l'analyse à réaliser.

Lemme 5.3. Racines des fonctions propres ϕ_n

Soit ϕ_n , $n \geq 1$, la n ème fonction propre de A_{11} , donnée par la relation (5.4). Alors

- a) ϕ_n a un nombre fini de racines dans l'intervalle $[0, L]$. De plus, l'ensemble des zéros de ϕ_n dans $[0, L]$, noté $Z[\phi_n]$, est donné par

$$Z[\phi_n] = \left\{ \frac{2D_a}{s_n} \left(\arctan\left(\frac{-s_n}{v}\right) + k\pi \right) : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup [0, L].$$

- b) En outre, L n'appartient pas à $Z[\phi_n]$ c'est-à-dire, $\phi_n(L) \neq 0$.
D'où il existe une constante $w_n > 0$ suffisamment petite tel que $\phi_n(z) \neq 0$ pour tout $z \in [L - w_n, L]$.

Démonstration.

Tout d'abord, démontrons que l'ensemble des racines de la nème fonction propre ϕ_n est donné par $Z[\phi_n]$ comme défini dans ce lemme. Nous devons donc résoudre l'équation

$$\begin{aligned}\phi_n(z) = 0 &\Leftrightarrow \kappa_n e^{\frac{v}{2D_a}z} \left[\cos\left(\frac{s_n}{2D_a}z\right) + \frac{v}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{2D_a}z\right) \right] = 0, \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{s_n}{2D_a}z\right) + \frac{v}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{2D_a}z\right) = 0, \\ &\Leftrightarrow \frac{-v}{s_n} \tan\left(\frac{s_n}{2D_a}z\right) = 1,\end{aligned}\tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \frac{s_n}{2D_a}z = \arctan\left(\frac{-s_n}{v}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ &\Leftrightarrow z = \frac{2D_a}{s_n} \left[\arctan\left(\frac{-s_n}{v}\right) + k\pi \right], \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

De plus, ϕ_n admet un nombre fini de zéro sur $[0, L]$ car c'est une fonction holomorphe^[1] (elle est composée de fonctions exponentielles et trigonométriques qui sont des fonctions holomorphes) et que $[0, L]$ est un intervalle fermé borné, c'est donc un ensemble compact. Or, une fonction holomorphe $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, non identiquement nulle, admet un nombre fini de racines sur tout sous-ensemble compact de X .

La deuxième partie de la preuve consiste à démontrer que $\phi_n(L)$ est non nul. Par l'absurde, supposons que $\phi_n(L) = 0$ et montrons que nous arrivons à une contradiction. Reprenons l'équation (5.6) appliquée à L ,

$$\begin{aligned}\phi_n(L) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-v}{s_n} \tan\left(\frac{s_n}{2D_a}L\right) = 1, \\ &\Leftrightarrow \tan\left(\frac{s_n}{2D_a}L\right) = \frac{-s_n}{v}.\end{aligned}$$

En utilisant l'équation résolvante 3.8, nous obtenons la formulation suivante,

$$\Leftrightarrow \frac{2vs_n}{s_n^2 - v^2} = \frac{-s_n}{v}.$$

1. Dans le document [1] Chapitre 2, Section 1], une fonction holomorphe est définie comme suit. "Soit U un ouvert de \mathbb{C} . Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable au sens complexe en $z \in U$ si la limite

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe.

Si cette limite existe pour tout point z de U et si la fonction $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ qu'elle définit est continue sur U , on dit que f est holomorphe sur U ."

Puisque les solutions s_n sont strictement positives, nous pouvons diviser chacun des membres de l'équation par s_n ,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{2v}{s_n^2 - v^2} &= \frac{-1}{v}, \\ \Leftrightarrow \frac{2v^2}{s_n^2 - v^2} &= \frac{-(s_n^2 - v^2)}{s_n^2 - v^2}, \\ \Leftrightarrow \frac{v^2 + s_n^2}{s_n^2 - v^2} &= 0, \\ \Leftrightarrow v^2 &= -s_n^2. \end{aligned}$$

Cela est impossible car s_n est strictement positif, tout comme v . Nous déduisons alors que $\phi_n(L)$ est non nul. Il en suit, en utilisant également la continuité de la fonction ϕ_n , qu'il existe une constante $w_n > 0$ suffisamment petite telle que $\phi_n(z) \neq 0 \forall z \in [L - w, L]$.

□

A présent, nous pouvons déduire un résultat concernant l'observabilité modale du système.

Théorème 5.2. Observabilité modale avec deux mesures

Il existe un entier positif N tel que les N premiers modes du réacteur à dispersion axiale c'est-à-dire, $(\mu_n \Phi_n)$ pour $n = 1, \dots, N$, sont C – observables lorsque deux composantes x_1 et x_2 sont mesurées à la sortie du réacteur.

Démonstration. Nous allons détailler les grandes lignes de la réflexion qui permettent d'établir le résultat présent dans ce théorème.

Lorsque n tend vers l'infini, nous observons, en analysant $Z[\phi_n]$ développé dans le Lemme 5.3, que le nombre de racines de ϕ_n dans l'intervalle $[0, L]$ augmente et tend vers l'infini. De ce fait, la plus grande racine de ϕ_n dans $[0, L]$ tend vers L .

Donc, pour $n > N$ suffisamment grand, on ne peut plus conclure qu'il existe $z_n \in]L - w, L[$ tel que $\phi_n(z_n)$ est non nul car ϕ_n admet au moins un zéro dans l'intervalle $[L - w_n, L]$. Ainsi, lorsque N est suffisamment grand, nous ne pouvons pas conclure si le mode n pour $n > N$ est observable ou non rien qu'en étudiant les racines des fonctions propres ϕ_n .

□

5.2.2 Observabilité avec une mesure

Etudions brièvement les propriétés d'observabilité lorsqu'une seule composante est mesurée à la sortie du réacteur.

Dans le cas où seule x_1 est mesurée à la sortie du réacteur, le réacteur à dispersion axiale c'est-à-dire, (c_1, A) n'est pas observable. Nous retrouvons donc la même conclusion que lorsque nous travaillons avec le réacteur à effet piston.

Concernant la propriété d'observabilité, lorsque seule la composante x_2 est mesurée à la sortie du réacteur, nous allons obtenir des résultats analogues à ceux développés lorsque deux composantes étaient disponibles. En effet, le rang de $c_2\phi_n$ est non nul, si et seulement si,

$$\int_{L-w}^L \phi_n(z) dz \neq 0.$$

Nous obtenons alors le résultat qui suit.

Théorème 5.3. Observabilité modale avec une mesure

Il existe un entier positif N tel que les N premiers modes du réacteur à dispersion axiale c'est-à-dire, $(\mu_n\Phi_n)$ pour $n = 1, \dots, N$, sont c_2 – observables lorsque seule la composante x_2 est mesurée à la sortie du réacteur.

Conclusion et perspectives

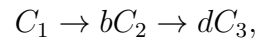
Ce mémoire a permis de mettre en évidence l'analyse dynamique de deux modèles, celui du réacteur tubulaire à effet piston et celui du réacteur tubulaire à dispersion axiale. L'étude de la positivité constitue le cœur de notre analyse et nous permet d'affirmer que pour toute condition initiale et entrée positives, la trajectoire d'état et la sortie correspondantes sont positives.

Dans le cas du réacteur tubulaire à effet piston, nous avons corrigé un théorème de génération et positivité de semi-groupes pour ensuite l'appliquer au modèle du réacteur. Ceci constitue une recherche inédite sur le sujet.

Concernant le réacteur à dispersion axiale, nous avons développé les problèmes de génération et de positivité en deux cas distincts. Ces études se sont appuyées sur des propriétés des opérateurs spectraux de Riesz et des opérateurs de Sturm-Liouville, concernant notamment des résultats de positivité, de fermeture, d'inverse, de base orthonormale, etc. En outre, nous avons montré que l'opérateur générant le semi-groupe était un opérateur de Riesz. Cette démonstration consiste en un développement complet et détaillé du résultat énoncé dans l'article [19].

Un autre point abordé dans cette étude concerne les questions de stabilité et d'observabilité. Nous avons mis en évidence que le système associé au réacteur tubulaire à effet piston est stable, tout comme celui avec dispersion axiale. Concernant l'observabilité, les résultats étaient moins évidents. Dans le cas du réacteur à effet piston, l'observabilité est obtenue lorsque deux composantes sont mesurées à la sortie du réacteur. Par contre, lorsque seule la concentration en produit est mesurée en sortie du réacteur, l'observabilité n'est possible qu'en imposant l'hypothèse de positivité. Un premier travail envisageable par la suite concernerait l'étude du problème sous un autre angle. En effet, il serait intéressant de montrer que nous pouvons nous affranchir de l'hypothèse de la positivité. En outre, il serait pertinent de compléter l'analyse dynamique en abordant les questions de contrôlabilité, atteignabilité, etc. De plus, nous pourrions également développer l'étude de ces questions dans le cas du réacteur tubulaire avec dispersion axiale car seule une brève description de la propriété d'observabilité du système a été dressée. Nous avons évoqué que les mêmes premiers modes du système étaient observables lorsque deux composantes sont mesurées à la sortie du réacteur ou que seule la concentration en produit est mesurée. Cependant, cette analyse pourrait être développée davantage et accompagnée de propriétés sur la contrôlabilité ou l'atteignabilité.

Afin d'approfondir la recherche, il serait intéressant de considérer l'analyse des réactions en chaînes c'est-à-dire, de considérer par exemple une réaction du type



où le produit C_2 obtenu entraîne la poursuite d'une réaction. L'idée serait de transposer notre modèle dans le cas avec deux réactions en chaînes pour le généraliser à N réactions dans un second temps. Ensuite, nous pourrions aborder les questions de "problème bien posé", de stabilité et d'observabilité lorsque plus d'une réaction survient.

Bibliographie

- [1] Audin M., *Analyse complexe*, Notes de cours, Université de Strasbourg, France, année académique 2005-2006
- [2] Batty C. , Robinson D., *Positive One-Parameter Semigroups on Ordered Banach Spaces*, Acta Applicandae Mathematica, Vol.1, pp. 221-296, 1984
- [3] Boulesteix S., *Cisaillement d'une interface gaz-liquide en conduite et entraînement de gouttelette*, Thèse en vue de l'obtention du doctorat de l'université de Toulouse, Université de Toulouse, France, 2010
- [4] Curtain R. F, Zwart H., *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, ed. Springer-Verlag, New York, USA, 1995
- [5] Delattre C., Dochain D., Winkin J., *Sturm-Liouville systems are Riesz-spectral system*, Journal of Applied Mathematics and Computational Science, Vol. 13, No. 4, pp. 481-484, 2003
- [6] Dochain D., *Contribution to the analysis and control of distributed parameter systems with application to (bio) chemical processes and robotics*, Thèse d'Agrégation de l'Enseignement Supérieur, UCL, Belgique, 1994
- [7] Fetahu E., *On Semigroups Of Linear Operators*, Thesis for the partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science, Budapest, Hungary, 2014
- [8] Jacob B., Zwart H., *14th Internet Seminar : Infinite-dimensional Linear Systems Theory*, Notes de lecture, 2010
- [9] Jungers M., Chitour Y., *Commande des processus : représentation d'état*, Notes de cours, Université de Paris-Sud XI, France, 2005
- [10] Klaus-Jochen E., Rainer N., *A Short Course on Operator Semigroups*, ed. Springer, New York, USA, 2006
- [11] Laabissi M., Achhab M. E. , Winkin J. J., Dochain D., *Trajectory analysis of nonisothermal tubular reactor nonlinear models*, Systems & Control letters, Vol. 42, pp. 169-184, 2001
- [12] Law C. K., Ng K. F., *Characterization of positive semigroups of operator on banach spaces*, Journal of mathematical analysis and applications, Vol. 170, pp. 207-213, 1992
- [13] Renardy M., Rogers R. C., *An Introduction to Partial Differential Equations*, ed. Springer, New-York, USA, 1993

- [14] Simon D., *Les réacteurs chimiques, cahier technique n° 8*, pour le Service public de Wallonie, 2010, disponible sur <http://energie.wallonie.be/servlet/Repository/dai-fichesureindustrie-reacteurschimiques.pdf?ID=16795>
(page consultée le 11 mars 2017)
- [15] Sobolev V. I., *Bochner integral*, Encyclopedia of Mathematics, 26 avril 2016, disponible sur http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Bochner_integral&oldid=38659
(page consultée le 9 mai 2018)
- [16] Peressini A., *Ordered Topological Vector Spaces*, Harper's Series in Modern Mathematics, New York, USA, 1967
- [17] Rhandi A., *A short introduction to Banach lattices and positive operators*, 2002, disponible sur <http://siba-ese.unisalento.it/index.php/quadmat/article/viewFile/8711/7967>
(page consultée le 23 mai 2018)
- [18] Trambouze P., *Réacteurs chimiques : technologie*, Techniques de l'ingénieur Réacteurs chimiques, ed. T.I, pp.2-10, Saint-Denis, France, décembre 1993
- [19] Winkin J., Dochain D., Ligarius P., *Dynamical analysis of distributed parameter tubular reactors*, Automatica, Vol. 36, pp. 349-361, 2000
- [20] Winkin J., *Systèmes complexes commandés*, Notes de cours, UNamur, Belgique, année académique 2016-2017

Annexes

Annexe A

Calcul de l'opérateur résolvant pour les réacteurs à effet piston (Suite)

Dans cette annexe, nous allons résoudre l'équation différentielle ordinaire

$$y_2 = -\alpha b k_0 x_1 + x_2 + \alpha v \frac{dx_2}{dz}.$$

Or, nous avons démontré dans le Chapitre 2 que $x_1 = \frac{y_1}{1 + \alpha k_0} \left(1 - e^{-\frac{(1+\alpha k_0)z}{\alpha v}}\right)$. L'équation à résoudre peut donc se réécrire

$$y_2 = -\alpha b k_0 \frac{y_1}{1 + \alpha k_0} \left(1 - e^{-\frac{(1+\alpha k_0)z}{\alpha v}}\right) + x_2 + \alpha v \frac{dx_2}{dz}. \quad (\text{A.1})$$

Dans un premier temps, nous allons solutionner l'équation homogène

$$x_2 + \alpha v \frac{dx_2}{dz} = 0.$$

Nous pouvons alors isoler les termes en x_2 et intégrer. Cela nous donne

$$\begin{aligned} \int \frac{dx_2}{x_2} &= \int \frac{-dz}{\alpha v}, \\ \Leftrightarrow \ln|x_2| &= \frac{-z}{\alpha v} + C. \end{aligned}$$

En prenant l'exponentielle des deux côtés de l'équation, nous avons

$$x_{2H} = K e^{\frac{-z}{\alpha v}}. \quad (\text{A.2})$$

A présent, faisons varier la constante K en la faisant dépendre de z . Pour ce faire, nous injectons la solution (A.2) dans l'équation (A.1) et nous obtenons

$$y_2 = -\alpha b k_0 \frac{y_1}{1 + \alpha k_0} \left(1 - e^{-\frac{(1+\alpha k_0)z}{\alpha v}}\right) + K e^{\frac{-z}{\alpha v}} + \alpha v \left(\frac{dK}{dz} e^{\frac{-z}{\alpha v}} - K \frac{1}{\alpha v} e^{\frac{-z}{\alpha v}} \right).$$

Après simplifications,

$$y_2 = -\alpha b k_0 \frac{y_1}{1 + \alpha k_0} \left(1 - e^{-\frac{(1+\alpha k_0)z}{\alpha v}}\right) + \alpha v \frac{dK}{dz} e^{\frac{-z}{\alpha v}}$$

et, si nous isolons dK et intégrons, nous avons

$$\int dK = \int \left(\frac{y_2}{\alpha v} e^{\frac{z}{\alpha v}} + \frac{\alpha b k_0}{1 + \alpha k_0} y_1 \left(\frac{1}{\alpha v} e^{\frac{z}{\alpha v}} - \frac{1}{\alpha v} e^{\frac{-k_0 z}{v}} \right) \right) dz,$$

$$\Leftrightarrow K = y_2 e^{\frac{z}{\alpha v}} + \frac{\alpha b k_0}{1 + \alpha k_0} y_1 \left(e^{\frac{z}{\alpha v}} + \frac{1}{\alpha k_0} e^{\frac{-k_0}{v} z} \right).$$

A présent, injectons K dans (A.2) afin d'obtenir la solution de l'équation différentielle. Celle-ci est donnée par

$$x_{2P} = y_2 + \frac{\alpha b k_0}{1 + \alpha k_0} y_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha k_0} e^{\frac{-(1+\alpha k_0)}{\alpha v} z} \right).$$

La solution générale est obtenue en sommant la solution particulière et homogène. D'où

$$x_2 = K e^{\frac{-z}{\alpha v}} + y_2 + \frac{\alpha b k_0}{1 + \alpha k_0} y_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha k_0} e^{\frac{-(1+\alpha k_0)}{\alpha v} z} \right).$$

Finalement, nous pouvons trouver la constante K à l'aide des conditions aux bords. Nous avons alors

$$x_2(0) = K + y_2 + \frac{\alpha b k_0}{1 + \alpha k_0} y_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha k_0} \right),$$

$$\Leftrightarrow 0 = K + y_2 + \frac{\alpha b k_0}{1 + \alpha k_0} y_1 \left(\frac{\alpha k_0 + 1}{\alpha k_0} \right),$$

$$\Leftrightarrow K = -y_2 - b y_1.$$

La solution de cette seconde équation différentielle est donc

$$x_2 = -b y_1 e^{\frac{-z}{\alpha v}} - y_2 e^{\frac{-z}{\alpha v}} + y_2 + \frac{\alpha b k_0}{1 + \alpha k_0} y_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha k_0} e^{\frac{-(1+\alpha k_0)}{\alpha v} z} \right).$$

Ce qui peut être réécrit comme

$$x_2 = b y_1 \left(\frac{\alpha k_0}{1 + \alpha k_0} + \left(\frac{1}{1 + \alpha k_0} e^{\frac{-k_0}{v} z} - 1 \right) e^{\frac{-z}{\alpha v}} \right) + y_2 \left(1 - e^{\frac{-z}{\alpha v}} \right).$$

Annexe B

Fermeture de l'opposé d'un opérateur fermé

Cette section a pour objectif de démontrer une proposition utile dans la démonstration visant à prouver que l'opérateur A_{11} est un opérateur spectral de Riesz. Afin d'éviter d'imbriquer des démonstrations les unes dans les autres, cette preuve est proposée en annexe.

Propriété B.1. Fermeture de l'opposé d'un opérateur fermé

Soit B un opérateur linéaire fermé sur un espace X .

Alors, l'opérateur opposé de B , $-B$, est fermé.

Démonstration. Nous souhaitons montrer que l'opérateur $-B$ est fermé. Cela revient donc à prouver que le graphe de l'opérateur $-B$, défini par

$$G(-B) = \{(x^*, -Bx^*) : x^* \in D(-B)\}$$

est fermé. En d'autres termes, nous devons démontrer que

$$\begin{aligned} \forall ((x_n^*, -Bx_n^*))_n \subset G(-B) \text{ tel que } \exists (x^*, y^*) \in (D(-B) \times D(-B)) \\ \text{tel que } (x_n^*, -Bx_n^*) \rightarrow (x^*, y^*) \text{ alors, } (x^*, y^*) \in G(-B). \end{aligned}$$

Par définition du graphe de l'opérateur $-B$, établir que $(x^*, y^*) \in G(-B)$ revient à montrer que $x^* \in D(-B)$ et $y^* = -Bx^*$.

Par hypothèse, nous savons que l'opérateur B est fermé. Cela entraîne donc que son graphe est fermé d'où,

$$\begin{aligned} \forall ((x_n, Bx_n))_n \subset G(B) \text{ tel que } \exists (x, y) \in (D(B) \times D(B)) \text{ tel que } (x_n, Bx_n) \rightarrow (x, y), \\ \text{on a } (x, y) \in G(B), \text{ ie } x \in D(B) \text{ et } y = Bx. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de poser $x_n^* = x_n$. En effet, $x_n \in D(-B) = D(B)$, ce qui implique que

$$((x_n^*, -Bx_n^*))_n \subset G(-B). \text{ Il en suit alors que } \begin{cases} x^* = x \in D(B) = D(-B), \\ y^* = -y \in -D(B) = D(-B). \end{cases}$$

Cela vient du fait que (x^*, y^*) sont tels que

$$(x_n^*, -Bx_n^*) \rightarrow (x^*, y^*) \Leftrightarrow (x_n, -Bx_n) \rightarrow (x^*, y^*) .$$

En utilisant l'hypothèse avec B fermé on a,

$$(x_n^*, -Bx_n^*) \rightarrow (x^*, y^*) \Leftrightarrow (x_n, -(Bx_n)) \rightarrow (x, -y) .$$

On obtient alors que $\begin{cases} x^* = x \in D(B) = D(-B) , \\ y^* = -y = -Bx = -Bx^* . \end{cases}$

L'opérateur $-B$ est donc un opérateur fermé.

□

Annexe C

Valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur A_{11}

Dans cette annexe, nous proposons un développement permettant d'obtenir les valeurs propres et vecteurs propres associés de l'opérateur A_{11} qui seront utiles pour prouver que l'opérateur A_{11} est un opérateur spectral de Riesz.

Tout d'abord, trouvons les valeurs propres de l'opérateur A_{11} . Nous savons, par définition, que λ est une valeur propre de A_{11} , si et seulement si, $A_{11} - \lambda I$ n'est pas injectif. En d'autres termes, si et seulement si, $\forall x_1 \in D(A_{11}), (A_{11} - \lambda I)x_1 = 0$. Cela peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 - \lambda x_1 = 0 &\Leftrightarrow D_a \frac{d^2 x_1}{dz^2} - v \frac{dx_1}{dz} - k_0 x_1 - \lambda x_1 = 0, \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2 x_1}{dz^2} - \frac{v}{D_a} \frac{dx_1}{dz} - \frac{(k_0 + \lambda)}{D_a} x_1 = 0, \\ &\Leftrightarrow \gamma^2 - \frac{v}{D_a} \gamma - \frac{(k_0 + \lambda)}{D_a} = 0. \end{aligned}$$

Les racines du polynôme caractéristique sont

$$\gamma_{12} = \frac{\frac{v}{D_a} \pm \sqrt{\frac{v^2 + 4(k_0 + \lambda) D_a}{D_a^2}}}{2} = \frac{v \pm \sqrt{v^2 + 4(k_0 + \lambda) D_a}}{2D_a}.$$

Dans la suite, nous poserons $\gamma_1 = \frac{v - \sqrt{v^2 + 4(k_0 + \lambda) D_a}}{2D_a}$ et $\gamma_2 = \frac{v + \sqrt{v^2 + 4(k_0 + \lambda) D_a}}{2D_a}$. Nous allons ensuite considérer différents cas.

Cas 1 : $\lambda > -\left(\frac{v^2}{4D_a} + k_0\right) > 0$.

Dans ce cas γ_1 et γ_2 sont des racines réelles et la forme générale des solutions est donnée par

$$x_1 = Ae^{\gamma_1 z} + Be^{\gamma_2 z}.$$

Les constantes A et B vont être déterminées en utilisant les conditions aux bords du modèle qui sont exprimées lors de la définition du domaine dans l'équation (1.10).

Ainsi, la condition initiale nous donne

$$\begin{aligned} D_a \frac{dx_1}{dz}(0) - vx_1(0) = 0 &\Rightarrow D_a(A\gamma_1 + B\gamma_2) - v(A + B) = 0, \\ &\Rightarrow A(D_a\gamma_1 - v) + B(D_a\gamma_2 - v) = 0, \\ &\Rightarrow A = \frac{-B(D_a\gamma_2 - v)}{D_a\gamma_1 - v}. \end{aligned}$$

En injectant cette solution pour la constante A dans la condition finale, nous avons

$$\begin{aligned} D_a \frac{dx_1}{dz}(L) = 0 &\Rightarrow D_a \left[\frac{-B(D_a\gamma_2 - v)}{D_a\gamma_1 - v} \gamma_1 e^{\gamma_1 L} + B\gamma_2 e^{\gamma_2 L} \right] = 0, \\ &\Rightarrow D_a B \left[\frac{-(D_a\gamma_2 - v)}{D_a\gamma_1 - v} \gamma_1 e^{\gamma_1 L} + \gamma_2 e^{\gamma_2 L} \right] = 0, \\ &\Rightarrow B = 0. \end{aligned}$$

Nous avons alors que $A = \frac{-B(D_a\gamma_2 - v)}{D_a\gamma_1 - v} = 0$, d'où x_1 est nul. Il n'y a donc pas de valeurs propres dans le cas où $\lambda > -\left(\frac{v^2}{4D_a} + k_0\right)$.

Cas 2 : $\lambda = -\left(\frac{v^2}{4D_a} + k_0\right)$.

Le polynôme caractéristique admet une seule racine de multiplicité 2, $\gamma = \frac{v}{2D_a}$. Dès lors, la forme générale des solutions est $x_1(z) = (Az + B)e^{\gamma z}$. A nouveau, nous allons pouvoir déterminer les valeurs de A et B en utilisant les conditions aux bords. Grâce à la condition initiale, nous avons que

$$\begin{aligned} D_a(A + B\gamma) - vB = 0 &\Leftrightarrow D_a A = vB - D_a B\gamma, \\ &\Leftrightarrow A = B \left(\frac{v - D_a\gamma}{D_a} \right). \end{aligned}$$

En injectant cette solution dans la condition finale, nous obtenons

$$\begin{aligned} D_a e^{\gamma L} (A + AL\gamma + B\gamma) = 0 &\Leftrightarrow e^{\gamma L} (B(v - D_a\gamma) + B(v - D_a\gamma)L\gamma + BD_a\gamma) = 0, \\ &\Leftrightarrow e^{\gamma L} B \left(v + L \frac{v^2}{2D_a} - D_a \frac{v^2}{4D_a^2} L \right) = 0, \\ &\Leftrightarrow e^{\gamma L} B \left(v + \frac{v^2 L}{4D_a} \right) = 0, \\ &\Rightarrow B = 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc que A et B sont nuls, d'où $x_1(z)$ est nul. Il n'y a donc pas de valeurs propres dans ce cas.

Cas 3 : $\lambda < -\left(\frac{v^2}{4D_a} + k_0\right) < 0$.

Les racines γ_1 et γ_2 sont complexes. On pose

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{v}{2D_a}, \\ s^2 &= -\left(v^2 + 4(k_0 + \lambda)D_a\right) > 0, \\ \beta &= \frac{s}{2D_a}.\end{aligned}$$

Ainsi, γ_1 et γ_2 s'écrivent respectivement $\alpha - i\beta$ et $\alpha + i\beta$. De ce fait, la forme générale des solutions est donnée par $x_1 = Ae^{\alpha z} \cos(\beta z) + Be^{\alpha z} \sin(\beta z)$.

En appliquant les conditions aux bords, nous obtenons

$$\begin{cases} D_a(A\alpha + B\beta) - vA = 0, \\ D_a[A\alpha e^{\alpha L} \cos(\beta L) - Ae^{\alpha L} \sin(\beta L)\beta + B\alpha e^{\alpha L} \sin(\beta L) + B\beta e^{\alpha L} \cos(\beta L)] = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons réécrire cela sous la forme d'un système matriciel par

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha D_a - v & \beta D_a \\ D_a[\alpha \cos(\beta L) - \beta \sin(\beta L)]e^{\alpha L} & D_a e^{\alpha L}[\alpha \sin(\beta L) + \beta \cos(\beta L)] \end{pmatrix}}_{:=M} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il est possible d'obtenir une solution non triviale seulement si la matrice est singulière c'est-à-dire, si

$$\begin{aligned}(\alpha D_a - v) D_a e^{\alpha L} [\alpha \sin(\beta L) + \beta \cos(\beta L)] - [e^{\alpha L} \beta D_a^2 (\alpha \cos(\beta L) - \beta \sin(\beta L))] &= 0, \\ \Leftrightarrow (\alpha D_a - v) [\alpha \sin(\beta L) + \beta \cos(\beta L)] - D_a \beta [\alpha \cos(\beta L) - \beta \sin(\beta L)] &= 0.\end{aligned}$$

Or, $\alpha = \frac{v}{2D_a}$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{-v}{2} \left[\frac{v}{2D_a} \sin(\beta L) + \beta \cos(\beta L) \right] - D_a \beta \left[\frac{v}{2D_a} \cos(\beta L) - \beta \sin(\beta L) \right] &= 0, \\ \Leftrightarrow \left[\frac{-v^2}{4D_a} + D_a \beta^2 \right] \sin(\beta L) = \left[\frac{v}{2} \beta + \frac{\beta v D_a}{2D_a} \right] \cos(\beta L).\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\beta = \frac{s}{2D_a}$, le résultat suivant est obtenu

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \tan\left(\frac{sL}{2D_a}\right) &= \frac{vs}{2D_a} \left(\frac{4D_a}{-v^2 + s^2} \right), \\ \Leftrightarrow \tan\left(\frac{sL}{2D_a}\right) &= \frac{2vs(1 + D_a)}{s^2 - v^2}.\end{aligned}\tag{C.1}$$

Nous obtenons alors une suite de s_n , $n \geq 1$ solutions de l'équation (C.1), tel que $0 < s_n < s_{n+1}$.

Ainsi les valeurs propres de l'opérateur A_{11} sont données par

$$\lambda_n = \frac{-s_n^2 - v^2}{4D_a} - k_0 = -\left(\frac{s_n^2 + v^2}{4D_a} + k_0\right) < -\left(\frac{v^2}{4D_a} + k_0\right) < 0 \quad \forall n \geq 1,$$

avec $(s_n)_{n \leq 1}$ l'ensemble de toutes les solutions de l'équation $\tan\left(\frac{sL}{2D_a}\right) = \frac{2vs}{s^2 - v^2}$.

Maintenant, trouvons les vecteurs propres associés à ces valeurs propres. Nous avons rappelé précédemment que la forme générale des solutions est donnée par

$$x_1(z) = Ae^{\alpha z} \cos(\beta z) + Be^{\alpha z} \sin(\beta z).$$

Nos vecteurs propres sont donc donnés par

$$\phi_n(z) = Ae^{\alpha z} \cos(\beta_n z) + Be^{\alpha z} \sin(\beta_n z).$$

A l'aide de la première condition aux bords, nous allons réexprimer nos vecteurs propres. Nous avons vu que

$$\begin{aligned} D_a(A\alpha + B\beta) - vA &= 0 \Leftrightarrow A(D_a\alpha - v) = -BD_a\beta, \\ &\Leftrightarrow B\beta D_a = A(v - D_a\alpha), \\ &\Leftrightarrow B = \frac{A(v - D_a\alpha)}{\beta D_a}. \end{aligned}$$

En utilisant les définitions de α et de β , nous pouvons simplifier l'expression pour obtenir

$$\Leftrightarrow B = \frac{v}{s}A.$$

La vérification de cette première condition ainsi que la définition des s_n comme solutions de l'équation (C.1) permettent de conclure au sujet de la vérification de la seconde condition aux bords. En effet, les s_n sont définis de façon à ce que la matrice M soit singulière. Cela signifie que les lignes de la matrice sont combinaisons linéaires les unes des autres. Ainsi, si une condition aux bords est vérifiée, l'autre l'est. De ce fait, nous déduisons le résultat suivant.

Les vecteurs propres de l'opérateur A_{11} sont donnés par

$$\phi_n(z) = e^{\frac{v}{2D_a}z} \left[\kappa_n \cos\left(\frac{s_n}{2D_a}z\right) + \frac{v}{s_n} \kappa_n \sin\left(\frac{s_n}{2D_a}z\right) \right]$$

ou encore,

$$\phi_n(z) = \kappa_n e^{\frac{v}{2D_a}z} \left[\cos\left(\frac{s_n}{2D_a}z\right) + \frac{v}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{2D_a}z\right) \right].$$

Annexe D

Calcul de l'opérateur adjoint de A_{11}

Cette annexe reprend le développement qui permet de calculer l'opérateur adjoint de l'opérateur A_{11} . L'expression de cet opérateur nous permettra ensuite de trouver les vecteurs propres qui lui sont associés.

Par définition, A_{11}^* est l'unique opérateur tel que $\langle Af, y \rangle = \langle f, A^*y \rangle \forall f, y \in H$. Intéressons-nous au premier membre de l'égalité et développons-le afin de trouver l'expression de A_{11}^* . Nous avons dès lors que

$$\langle A_{11}f, y \rangle = \int_0^L A_{11}f(z) y(z) dz.$$

En utilisant la définition de l'opérateur A_{11} , nous obtenons

$$\begin{aligned} &= \int_0^L \left(D_a \frac{d^2 f}{dz^2} - v \frac{df}{dz} - k_0 f(z) \right) y(z) dz, \\ &= D_a \int_0^L \frac{d^2 f}{dz^2} y(z) dz - v \int_0^L \frac{df}{dz} y(z) dz - k_0 \int_0^L f(z) y(z) dz. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties pour les deux premières intégrales, nous avons

$$\begin{aligned} &= D_a \left(\left[\frac{df}{dz} y(z) \right]_0^L - \int_0^L \frac{df}{dz} \frac{dy}{dz} dz \right) - v \left([f(z) y(z)]_0^L - \int_0^L f(z) \frac{dy}{dz} dz \right) \\ &\quad - k_0 \int_0^L y(z) f(z) dz. \end{aligned}$$

A présent, appliquons une nouvelle fois l'intégration par parties sur la première intégrale pour obtenir,

$$\begin{aligned} &= D_a \left(\left[\frac{df}{dz} y(z) \right]_0^L - \left\{ \left[f(z) \frac{dy}{dz} \right]_0^L - \int_0^L f(z) \frac{d^2 y}{dz^2} dz \right\} \right), \\ &\quad - v \left(f(L) y(L) - f(0) y(0) - \int_0^L f(z) \frac{dy}{dz} dz \right) - k_0 \int_0^L y(z) f(z) dz. \\ &= D_a \left(\left[\frac{df}{dz} y(z) \right]_0^L - \left[f(z) \frac{dy}{dz} \right]_0^L \right) - v (f(L) y(L) - f(0) y(0)) \\ &\quad + \int_0^L f(z) \left(D_a \frac{d^2 y}{dz^2} + v \frac{dy}{dz} - k_0 y \right) dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y(L) \left[D_a \frac{df}{dz}(L) - v f(L) \right] - y(0) \left[D_a \frac{df}{dz}(0) - v f(0) \right] \\
&\quad - D_a \left[f(L) \frac{dy}{dz}(L) - f(0) \frac{dy}{dz}(0) \right] + \int_0^L f(z) \left(D_a \frac{d^2 y}{dz^2} + v \frac{dy}{dz} - k_0 y \right) dz.
\end{aligned}$$

Nous pouvons simplifier ces expressions en utilisant les conditions aux bords du domaine de A_{11} .

$$\begin{aligned}
&= -f(L) \left[v y(L) + D_a \frac{dy}{dz}(L) \right] + f(0) D_a \frac{dy}{dz}(0) \\
&\quad + \int_0^L f(z) \left(D_a \frac{d^2 y}{dz^2} + v \frac{dy}{dz} - k_0 y \right) dz.
\end{aligned}$$

Les conditions aux bords de l'opérateur adjoint A_{11}^* nous permettent d'obtenir

$$\begin{aligned}
&= \int_0^L f(z) \left(D_a \frac{d^2 y}{dz^2} + v \frac{dy}{dz} - k_0 y \right) dz, \\
&= \langle f, A_{11}^* y \rangle.
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors conclure que l'opérateur adjoint est donné par

$$A_{11}^* y = D_a \frac{d^2 y}{dz^2} + v \frac{dy}{dz} - k_0 y$$

sur son domaine $D(A_{11}^*) = \left\{ y \in L^2(0, L) : y, \frac{dy}{dz} \in L^2(0, L) \text{ et sont absolument continus, } \frac{d^2 y}{dz^2} \in L^2(0, L), \frac{dy}{dz}(0) = 0, D_a \frac{dy}{dz}(L) + v y(L) = 0 \right\}$.

Annexe E

Calcul des vecteurs propres de l'opérateur adjoint de A_{11}

Cette annexe reprend le calcul des vecteurs propres de l'opérateur A_{11}^* , donné par

$$A_{11}^* y = D_a \frac{d^2 y}{dz^2} + v \frac{dy}{dz} - k_0 y.$$

Le calcul des vecteurs propres utilise un raisonnement similaire à celui de l'annexe [C](#). C'est pourquoi nous allons nous contenter de mettre en évidence les étapes importantes et inédites du développement.

Le polynôme caractéristique lié à cet opérateur est donné par

$$\gamma^2 + \frac{v}{D_a} \gamma - \frac{(k_0 + \lambda)}{D_a} = 0.$$

Les racines de ce polynôme sont donc $\gamma_{12} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4(k_0 + \lambda) D_a}}{2D_a}$. Seul le cas où ces racines sont complexes va admettre des valeurs propres et nous intéressera donc dans la suite c'est-à-dire, le cas où

$$\lambda < -\left(\frac{v^2}{4D_a} + k_0\right).$$

Nous noterons α la partie réelle des racines et β la partie imaginaire. De ce fait, $\alpha = \frac{-v}{2D_a}$ et $\beta = \frac{s}{2D_a}$, avec $s = -(v^2 + 4(k_0 + \lambda) D_a) > 0$.

Les vecteurs propres de A_{11}^* sont donnés par $\psi_m(z) = Ae^{\alpha z} \cos(\beta_m z) + Be^{\alpha z} \sin(\beta_m z)$. Il nous faut déterminer les constantes A et B . En supposant que les s_m vérifient l'équation qui engendre que la matrice du système matriciel des conditions aux bords est singulière, la vérification d'une des conditions aux bords entraîne la vérification de la seconde.

La deuxième condition aux bords de A_{11}^* , à savoir

$$D_a \left(\frac{dy}{dz}\right)(L) + vy(L) = 0,$$

va nous permettre de réexprimer les vecteurs propres de A_{11}^* .

$$\begin{aligned}
D_a \left(\frac{dy}{dz} \right) (L) + v y(L) &= 0, \\
\Leftrightarrow D_a \left[\frac{-v}{2D_a} A e^{\alpha L} \cos(\beta_m L) - A e^{\alpha L} \sin(\beta_m L) \frac{s_m}{2D_a} - B \frac{v}{2D_a} e^{\alpha L} \sin(\beta_m L) \right. \\
&\quad \left. + B \frac{s_m}{2D_a} e^{\alpha L} \cos(\beta_m L) \right] + v [A e^{\alpha L} \cos(\beta_m L) + B e^{\alpha L} \sin(\beta_m L)] = 0, \\
\Leftrightarrow A e^{\alpha L} \cos(\beta_m L) \frac{v}{2} + B e^{\alpha L} \sin(\beta_m L) \frac{v}{2} - A e^{\alpha L} \sin(\beta_m L) \frac{s_m}{2} + B e^{\alpha L} \cos(\beta_m L) \frac{s_m}{2} &= 0, \\
\Leftrightarrow A e^{\alpha L} [v \cos(\beta_m L) - s_m \sin(\beta_m L)] + B e^{\alpha L} [v \sin(\beta_m L) + s_m \cos(\beta_m L)] &= 0, \\
\Leftrightarrow B = A \frac{s_m \sin(\beta_m L) - v \cos(\beta_m L)}{v \sin(\beta_m L) + s_m \cos(\beta_m L)}.
\end{aligned}$$

Un calcul supplémentaire va permettre d'exprimer les vecteurs propres de A_{11}^* en fonction de A_{11} . Nous avons vu que

$$\psi_m(z) = A e^{\alpha z} \cos(\beta_m z) + B e^{\alpha z} \sin(\beta_m z).$$

La relation entre A et B définie précédemment nous permet d'écrire

$$\psi_m(z) = A e^{\alpha z} \cos(\beta_m z) + A \frac{s_m \sin(\beta_m L) - v \cos(\beta_m L)}{v \sin(\beta_m L) + s_m \cos(\beta_m L)} \sin(\beta_m z).$$

En posant $K_m = v \sin(\beta_m L) + s_m \cos(\beta_m L)$,

$$\begin{aligned}
\psi_m(z) &= A e^{\frac{-v}{2D_a} z} \left[\frac{\cos(\beta_m z) (v \sin(\beta_m L) + s_m \cos(\beta_m L))}{K_m} + \frac{(s_m \sin(\beta_m L) - v \cos(\beta_m L)) \sin(\beta_m z)}{K_m} \right], \\
&= \frac{A}{K_m} e^{\frac{-v}{2D_a} z} [v \cos(\beta_m z) \sin(\beta_m L) + s_m \cos(\beta_m z) \cos(\beta_m L) + \\
&\quad s_m \sin(\beta_m L) \sin(\beta_m z) - v \cos(\beta_m L) \sin(\beta_m z)], \\
&= \frac{A}{K_m} e^{\frac{-v}{2D_a} z} [v \sin(\beta_m (L - z)) + s_m \cos(\beta_m (L - z))], \\
&= \frac{A}{K_m} e^{\frac{-v}{2D_a} z} \left[\cos(\beta_m (L - z)) + \frac{v}{s_m} \sin(\beta_m (L - z)) \right].
\end{aligned}$$

Afin de retomber sur les vecteurs propres de A_{11} , nous allons utiliser un artifice de calcul qui nous donne

$$\psi_m(z) = \frac{A}{K_m} e^{\frac{-v}{2D_a} z} \frac{e^{\frac{v}{2D_a} L}}{e^{\frac{v}{2D_a} L}} \left[\cos(\beta_m (L - z)) + \frac{v}{s_m} \sin(\beta_m (L - z)) \right].$$

En posant $M_n = \frac{A}{K_m e^{\frac{v}{2D_a} L}}$, et par la définition des ϕ_n nous avons

$$\psi_m(z) = M_n \phi_n(L - z).$$

Annexe F

Fermeture d'un opérateur shifté

Dans cette annexe, nous allons montrer que si B est un opérateur fermé, alors l'opérateur shifté, défini comme $B + \alpha I$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est fermé. Ce résultat sera utile pour démontrer que l'opérateur A_{22} est un opérateur fermé. Cela nous aidera à conclure sur sa propriété d'opérateur de Riesz.

Propriété F.1.

Soit B un opérateur linéaire fermé sur un espace X .

Alors, l'opérateur shifté, $B + \alpha I$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, est un opérateur fermé.

Démonstration. Démontrons que l'opérateur $B + \alpha I$ est fermé. Soit

$$((x_n^*, (B + \alpha I) x_n^*))_n \text{ tel que } \exists (x^*, y^*) \in (D(B + \alpha I) \times D(B + \alpha I))$$

$$\text{tel que } (x_n^*, (B + \alpha I) x_n^*) \rightarrow (x^*, y^*).$$

Montrons que, $x^* \in D(B + \alpha I)$ et $y^* = (B + \alpha I) x^*$.

Par hypothèse, nous savons que l'opérateur B est fermé. Cela entraîne donc que son graphe est fermé d'où,

$$\forall ((x_n, Bx_n))_n \subset G(B) \text{ tel que } \exists (x, y) \in (D(B) \times D(B)) \text{ tel que } (x_n, Bx_n) \rightarrow (x, y),$$

$$\text{on a } x \in D(B) \text{ et } y = Bx.$$

Pour conclure, il suffit de prendre $x_n^* = x_n$. Ce choix convient car $x_n^* = x_n \in D(B) = D(B + \alpha I)$ par linéarité de l'opérateur B . De plus,

$$(B + \alpha I) x_n^* = (B + \alpha I) x_n = Bx_n + \alpha x_n \in D(B) = D(B + \alpha I).$$

En outre, ce choix nous permet de trouver $x^* \in D(B + \alpha I)$ et $y^* = (B + \alpha I) x^*$. Effectivement, par hypothèses nous savons que

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n^* \longrightarrow x^* \\ (B + \alpha I) x_n^* = y^* \end{array} \right\} \stackrel{x_n^* = x_n}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} x_n \longrightarrow x^* \\ Bx_n + \alpha x_n = y^* \end{array} \right\} \stackrel{(\text{par hypothèse})}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} x_n \longrightarrow x \\ Bx_n + \alpha x_n = y + \alpha x \end{array} \right\}.$$

D'où $x^* = x \in D(B) = D(B + \alpha I)$ et $y^* = y + \alpha x$. Or, comme B est fermé, nous savons que $y = Bx$. Cela entraîne que $y^* = Bx + \alpha x = (B + \alpha I)x$. Ce qui, par la définition de x^* mise en évidence précédemment, se réécrit comme $y^* = (B + \alpha I)x^*$.

L'opérateur $B + \alpha I$ est donc un opérateur fermé.

□

Annexe G

Signe de la fonction g présente dans le calcul de l'opérateur résolvant de \tilde{A}

Cette annexe reprend les différentes étapes du calcul qui permettront au final de connaître le signe de la fonction g , présente dans l'opérateur résolvant de \tilde{A} , opérateur intermédiaire permettant de conclure à la positivité du semi-groupe $T(t)$ dans le cas des réacteurs tubulaires à dispersion axiale.

Pour rappel de la Propriété [3.3](#), nous avons que

$$W(0)p(0)g(z, y) = \begin{cases} -s_1(z)s_2(y), & \text{si } 0 \leq z \leq y \leq L, \\ -s_2(z)s_1(y), & \text{si } 0 \leq y \leq z \leq L, \end{cases} \quad (\text{G.1})$$

où s_1 et s_2 sont les solutions linéairement indépendantes des équations différentielles ordinaires

$$p \frac{d^2 s_1}{dz^2} + \frac{dp}{dz} \frac{ds_1}{dz} - qs_1 = 0, \quad P_1 s_1 = 0, \quad P_2 s_1 \neq 0, \quad (\text{G.2})$$

$$p \frac{d^2 s_2}{dz^2} + \frac{dp}{dz} \frac{ds_2}{dz} - qs_2 = 0, \quad P_1 s_2 \neq 0, \quad P_2 s_2 = 0 \quad (\text{G.3})$$

et

$$W(0) = s_1(0) \frac{ds_2}{dz}(0) - s_2(0) \frac{ds_1}{dz}(0). \quad (\text{G.4})$$

En observant l'expression [\(G.1\)](#), nous déduisons que pour connaître le signe de la fonction g , il suffit de trouver les signes des constantes $W(0)$ et $p(0)$, ainsi que celui des fonctions s_1 et s_2 .

Intéressons-nous dans un premier temps aux fonctions s_1 et s_2 . Pour déterminer les expressions de ces dernières, nous devons résoudre les équations différentielles homogènes du second ordre définies en [\(G.2\)](#) et [\(G.3\)](#), où les fonctions p et q sont les fonctions de bases des opérateurs de Sturm-Liouville. Elles sont donc définies par $p(z) = \beta e^{\frac{-v}{\beta} z}$ et $q(z) = \alpha e^{\frac{-v}{\beta} z}$, comme détaillé en [3.18a](#) et [3.18d](#).

De ce fait, si nous nous concentrons sur la première équation différentielle, (G.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} p \frac{d^2 s_1}{dz^2} + \frac{dp}{dz} \frac{ds_1}{dz} - q s_1 &= 0, \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 s_1}{dz^2} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} \frac{ds_1}{dz} - \frac{q}{p} s_1 &= 0. \end{aligned}$$

En remplaçant par les expressions de p et q , nous obtenons,

$$\frac{d^2 s_1}{dz^2} + \frac{-v}{\beta} \frac{ds_1}{dz} - \frac{\alpha}{\beta} s_1 = 0.$$

Nous avons donc une équation différentielle à coefficients constants. Son équation caractéristique est donnée par

$$\lambda^2 - \frac{v}{\beta} \lambda - \frac{\alpha}{\beta} = 0.$$

Calculons les racines de ce polynôme,

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\frac{v}{\beta} \pm \sqrt{\frac{v^2}{\beta^2} + 4 \frac{\alpha}{\beta}}}{2}, \\ &= \frac{v \pm \sqrt{v^2 + 4\alpha\beta}}{2\beta}. \end{aligned}$$

Pour la suite, nous allons considérer $r_1 = \frac{v - \sqrt{v^2 + 4\alpha\beta}}{2\beta}$ et $r_2 = \frac{v + \sqrt{v^2 + 4\alpha\beta}}{2\beta}$.

Finalement, nous obtenons que la solution s_1 de l'équation différentielle (G.2) est de la forme

$s_1 = Ae^{r_1 z} + Be^{r_2 z}$. En utilisant les conditions d'existence, nous pouvons déterminer les inconnues A et B de la fonction s_1 . En effet, nous savons que $P_1 s_1 = 0$ et $P_2 s_1 \neq 0$. En utilisant la définition de P_1 qui a été abordée lors de l'énoncé de la Définition 3.1 et qui a été adaptée pour l'opérateur \tilde{A} , grâce aux relations (3.14), nous observons que la première condition devient,

$$\begin{aligned} P_1 s_1 = 0 &\Leftrightarrow \beta \frac{ds_1}{dz}(0) - v s_1(0) = 0, \\ &\Leftrightarrow \beta (Ar_1 + Br_2) - v (A + B) = 0, \\ &\Leftrightarrow A(r_1\beta - v) = B(v - r_2\beta), \\ &\Leftrightarrow A = \frac{B(v - r_2\beta)}{r_1\beta - v}. \end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire, nous obtenons que la seconde condition devient,

$$\begin{aligned} P_2 s_1 \neq 0 &\Leftrightarrow \beta \frac{ds_1}{dz}(L) - 0 s_1(L) \neq 0, \\ &\Leftrightarrow \beta (Ar_1 e^{r_1 L} + Br_2 e^{r_2 L}) \neq 0, \\ &\Leftrightarrow A \neq \frac{-Br_2 e^{r_2 L}}{r_1 e^{r_1 L}}. \end{aligned}$$

Sans perdre de généralité, prenons $B = 1$, et rassemblons les deux conditions,

$$\Rightarrow A = \frac{v - r_2\beta}{r_1\beta - v}.$$

Un raisonnement similaire peut être appliqué à la deuxième équation différentielle, nous obtenons alors

$$s_2 = A'e^{r_1z} + B'e^{r_2z},$$

avec, sans perdre de généralité, $B' = 1$ et

$$A' = \frac{-r_2e^{r_2L}}{r_1e^{r_1L}}.$$

En résumé, les fonctions linéairement indépendantes s_1 et s_2 sont données par

$$s_1 = \frac{v - r_2\beta}{r_1\beta - v}e^{r_1z} + e^{r_2z},$$

et

$$s_2 = \frac{-r_2}{r_1}e^{r_2L-r_1L}e^{r_1z} + e^{r_2z}.$$

Nous avons donc que s_1 et s_2 sont des fonctions positives. En effet, concernant la fonction s_2 , nous avons que r_1 est négative et r_2 est positive. Nous additionnons donc, dans l'expression de s_2 , deux termes positifs. Le résultat est donc également positif. Concernant la fonction s_1 , nous additionnons également deux résultats positifs. Effectivement, $\frac{v-r_2\beta}{r_1\beta-v}$ est une quantité positive. Cela est démontré dans ce qui suit.

$$\begin{aligned} \frac{v - r_2\beta}{r_1\beta - v} &= \frac{v - \left(\frac{v + \sqrt{v^2 + 4\beta\alpha}}{2\beta} \right) \beta}{\left(\frac{v - \sqrt{v^2 + 4\beta\alpha}}{2\beta} \right) \beta - v}, \\ &= \frac{2v - v - \sqrt{v^2 + 4\beta\alpha}}{v - \sqrt{v^2 + 4\beta\alpha} - 2v}, \\ &= \frac{v - \sqrt{v^2 + 4\beta\alpha}}{-v - \sqrt{v^2 + 4\beta\alpha}}. \end{aligned}$$

Le numérateur et le dénominateur de cette fraction sont tous deux négatifs car, pour rappel, $\beta > 0$ par hypothèse (3.15). Nous en déduisons donc que

$$\frac{v - r_2\beta}{r_1\beta - v} > 0.$$

Nous devons à présent calculer la constante $W(0)$ en utilisant la définition (G.4) afin de déterminer son signe. De ce fait,

$$\begin{aligned} W(0) &= s_1(0) \frac{ds_2}{dz}(0) - s_2(0) \frac{ds_1}{dz}(0), \\ &= \left[\frac{v - r_2\beta}{r_1\beta - v} + 1 \right] \left[\frac{-r_2}{r_1}e^{r_2L-r_1L}r_1 + r_2 \right] - \left(\left[\frac{-r_2}{r_1}e^{r_2L-r_1L} + 1 \right] \left[\frac{v - r_2\beta}{r_1\beta - v}r_1 + r_2 \right] \right). \end{aligned}$$

Développons cette expression afin d'en déduire le signe.

$$W(0) = \frac{v - r_2\beta}{r_1\beta - v} (-r_2) e^{r_2L - r_1L} - r_2 e^{r_2L - r_1L} + r_2 \frac{v - r_2\beta}{r_1\beta - v} + r_2 \\ - \left(-r_2 e^{r_2L - r_1L} \frac{v - r_2\beta}{r_1\beta - v} - \frac{r_2^2}{r_1} e^{r_2L - r_1L} + \frac{v - r_2\beta}{r_1\beta - v} r_1 + r_2 \right).$$

Après simplifications, cela donne

$$W(0) = -r_2 e^{r_2L - r_1L} + r_2 \frac{v - r_2\beta}{r_1\beta - v} + \frac{r_2^2}{r_1} e^{r_2L - r_1L} - \frac{v - r_2\beta}{r_1\beta - v} r_1.$$

Finalement, nous allons développer l'expression pour obtenir une forme plus facile à analyser.

$$W(0) = -r_2 e^{r_2L - r_1L} + \frac{r_2 v - r_2^2 \beta}{r_1\beta - v} + \frac{r_2^2}{r_1} e^{r_2L - r_1L} + \frac{r_2 r_1 \beta - r_1 v}{r_1\beta - v}, \\ = \frac{1}{r_1\beta - v} \left[r_2^2 \left(-\beta + \frac{r_1\beta - v}{r_1} e^{r_2L - r_1L} \right) + r_2 \left(-e^{r_2L - r_1L} (r_1\beta - v) + v + r_1\beta \right) - r_1 v \right], \\ = \frac{1}{r_1\beta - v} \left[r_2^2 \left(\frac{-\beta r_1 + (r_1\beta - v) e^{r_2L - r_1L}}{r_1} \right) \right. \\ \left. + r_2 \left(-r_1\beta (e^{r_2L - r_1L} - 1) + v (e^{r_2L - r_1L} + 1) \right) - r_1 v \right], \\ = \frac{1}{r_1\beta - v} \left[r_2^2 \left(\frac{\beta r_1 (e^{r_2L - r_1L} - 1) - v e^{r_2L - r_1L}}{r_1} \right) \right. \\ \left. + r_2 \left(-r_1\beta (e^{r_2L - r_1L} - 1) + v (e^{r_2L - r_1L} + 1) \right) - r_1 v \right].$$

Chacun des termes de la parenthèse est positif. De plus, $\frac{1}{r_1\beta - v}$ est un terme négatif, comme discuté précédemment. Nous en déduisons alors que $W(0)$ est une constante négative.

Finalement, grâce à l'égalité (G.1) et en utilisant le fait que $W(0) < 0$, $p(0) = \beta > 0$, $s_1 > 0$ et $s_2 > 0$, nous déduisons que la fonction g est une fonction positive.